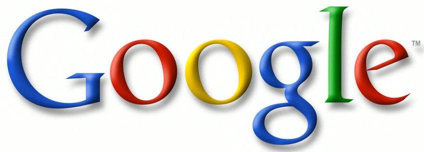
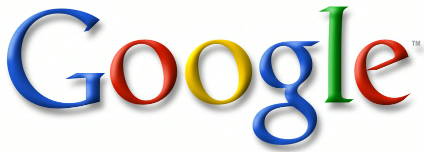






LEITFADEN

DER

PRAKTISCHEN PHYSIK

MIT EINEM ANHANGE

DAS ELEKTRISCHE UND MAGNETISCHE ABSOLUTE MAASS-SYSTEM

VON

DR. F. KOHLRAUSCH,

O. PROFESSOR AM GROSSH. POLYTECHNICUM ZU DARMSTADT.



ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1872.

Das vorliegende Buch soll als Wegweiser bei praktisch-physikalischen Arbeiten, insbesondere Messungen dienen. Nachdem die erste, zunächst für meine Prakticanten in Göttingen gedruckte Auflage auch anderweitigen Eingang gefunden hat, habe ich die jetzige durch bessere Anordnung und Vervollständigung zum Gebrauch in weiteren Kreisen tauglich zu machen gesucht.

Die Aufgaben, welche der praktischen Physik gestellt werden können, lassen sich in folgende vier Punkte zusammenfassen. Zunächst steht erfahrungsgemäss fest, dass ein Theil der physikalischen Lehren, und zwar vorzugsweise der quantitative also nicht der unwichtigste, durch blosses Hören nicht begriffen wird. Interesse und Verständniss für diese Sätze werden nicht durch den blossen Vortrag geweckt, wogegen oft die einmalige praktische Anwendung eines Satzes genügt, um den Schüler mit ihm vertraut zu machen. Zweitens gibt es eine Reihe von Aufgaben, deren Ausführung dem Chemiker, Mineralogen, Mediciner, Pharmaceuten oder Techniker bekannt sein soll. Die Vorlesung, wenn sie überhaupt auf eine solche Aufgabe eingeht, kann dieselbe nur in principieller Weise behandeln; von hier aber bis zur praktischen Ausführung ist noch ein weiter Schritt. Der Stand der Kenntnisse in diesen Dingen macht denn auch den bisherigen Mangel an praktischem Unterricht fühlbar genug: ihre geringe Verbreitung, die oft eine erstaunliche Scheu vor den einfachsten physikalischen Aufgaben zur Folge hat, ist eben so bekannt, wie erschreckend gross.

Sodann aber liegt für die Physik selbst das Bedürfniss einer Vorschule für die experimentelle wissenschaftliche Forschung vor. Unterrichtsgegenstand kann freilich die eigentliche Forschung nur in

sehr beschränktem Maasse sein, wohl aber fordern die Pflicht und das eigene Interesse von der Physik, dass sie den künftigen Physiker mit seinem, ich möchte sagen wissenschaftlichen Handwerkszeug vertraut macht. Es bleibt immer noch mehr als genug Detail übrig, welches bei einer Untersuchung selbständig beschafft werden muss.

Die genannten drei Disciplinen sind es in erster Linie, welche das Buch in's Auge fasst, indem es Vorschriften zur Ausführung physikalischer Messungen gibt und dabei diejenigen bevorzugt, welche als Anwendungen ausserhalb der Physik oder als Elemente wissenschaftlicher Untersuchung eine besondere Bedeutung haben. Soll auch die vierte Aufgabe, nämlich die Heranbildung physikalischer Lehrer durch Versuche mit Unterrichtsapparaten hereingezogen werden, so glaube ich, dass auch diese Uebungen am besten, durch eine passende Auswahl der instrumentellen Mittel, mit messenden Aufgaben zu verbinden sind. Dadurch wird die Gefahr vermieden, dass die Anstellung von Versuchen ohne ein unmittelbares Ziel in Spielerei ausarte. Ein eigentlicher Cursus in Unterrichts-Experimenten würde manchen Schwierigkeiten begegnen; er erscheint aber auch unnöthig, denn wer sich in den quantitativen Aufgaben einige Gewandtheit erworben hat, wird auch die Vorlesungsversuche ohne Schwierigkeit bewältigen.

Inhalt und Umfang einer Anleitung zur physikalischen Arbeit wird vor Allem durch die Grenze der Genauigkeit bestimmt, bis zu welcher die Aufgaben durchgeführt werden sollen, und darin bleibt natürlich ein weiter Spielraum. Ich habe diejenige Grenze inne zu halten gesucht, bei welcher die um der Einfachheit willen vernachlässigten Correctionen mindestens nicht grösser sind, als die unfreiwilligen Beobachtungsfehler bei den gewöhnlich gebrauchten Instrumenten und bei mittlerer Geschicklichkeit im Beobachten. Bei den sehr auseinandergehenden individuellen Zwecken und Mitteln kann ich selbstverständlich nicht daran denken, Jedermanns Wünschen gerecht geworden zu sein; vielmehr wird ohne Zweifel an manchen Stellen der Eine noch eine gründlichere Behandlung vermissen, wo dem Anderen die Strenge schon als Pedanterie erscheint.

An bestimmte Instrumente schliessen sich die Anleitungen, wo es möglich war, nicht an, und auch Beschreibungen von

Apparaten finden sich selten, denn letztere sind ja dem Arbeitenden meistens gegeben, und in den Lehrbüchern der Experimentalphysik findet er fast immer Abbildungen und Beschreibungen. Nur bei einigen neueren oder weniger bekannten Apparaten ist eine Ausnahme gemacht.

Die ausführliche Begründung aller Rechnungsregeln würde zu weit gehen, doch sind häufig kurze Beweise und Erläuterungen (mit kleiner Schrift) beigefügt worden, um dem Prakticanten die Einsicht in den Zusammenhang zu erleichtern. Zum Verständniss der magnetischen und elektrischen absoluten Messungen, denen eine übersichtliche Literatur fehlt, auf welche aber die praktische Physik das grösste Gewicht legen muss, wird im Anhang eine kurze Darlegung der wichtigsten Puncte des absoluten Maſssystems gegeben.

Der mathematische Apparat beschränkt sich, ausser an wenigen Stellen in den Erläuterungen, auf Elementar-Mathematik.

Dass die Zeichen der chemischen Grundstoffe mit derjenigen Zahlenbedeutung angewandt werden, welche sie vor etwa 15 Jahren eine Zeitlang stabil besassen, ist darin begründet, dass diese Bedeutung auch den in der neueren Chemie Unterrichteten niemals zu einem Irrthum veranlassen wird, während das Umgekehrte vorkommen könnte.

Von den zum Theil neu berechneten Tabellen dürften manche auch für Physiker nützlich sein. Ich habe mich bemüht, sie auf das beste Beobachtungsmaterial zu gründen.

Darmstadt, im Mai 1872.

F. Kohlrausch.

Inhalt.

Einleitung.

Aufgaben der praktischen Physik.

Wägung und Dichtigkeitsbestimmung.

Seite

Luftdruck.

Wärme.

Elasticität.

Licht.

Das absolute magnetische und elektrische Maafssystem.

Seite

Tabellen.

Einleitung.

1. Beobachtungsfehler. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler.

Der durch eine Messung gewonnene Zahlenwerth einer physikalischen Grösse wird wegen der Unvollkommenheit der Beobachtung mit einem Fehler behaftet sein. Wenn die nämliche Grösse wiederholt gemessen worden ist, so bietet die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Mittel, um aus der Uebereinstimmung der einzelnen Resultate ein Urtheil über die wahrscheinliche Fehlergrenze zu gewinnen.

Wenn die einzelnen Bestimmungen nach der Ansicht des Beobachters alle denselben Grad von Zuverlässigkeit beanspruchen dürfen, so gibt bekanntlich das arithmetische Mittel aus den einzeln gewonnenen Resultaten den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Grösse. Das heisst, man addirt alle einzelnen Werthe und dividirt die entstehende Zahl durch die Anzahl der Bestimmungen.

Hierbei mag hervorgehoben werden, dass es im Allgemeinen durchaus ungerechtfertigt ist, aus einer Reihe von Beobachtungen einzelne willkürlich bloss desswegen auszuschliessen, weil sie mit der Mehrzahl nicht übereinstimmen. Der Wahrscheinlichkeit eines bei den abweichenden Zahlen begangenen grösseren Fehlers wird eben durch das arithmetische Mittel von selbst Rechnung getragen; denn als einzelne unter einer grösseren Anzahl haben sie einen geringen Einfluss auf den Mittelwerth.

Vergleicht man nun die einzelnen Zahlen mit dem Mittelwerth, so findet man grössere oder kleinere Differenzen, aus deren Betrage der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung sowie derjenige des Resultates nach folgenden Regeln bestimmt wird. Man bildet zuerst die Summe der Fehlerquadrate, das heisst man erhebt die Differenz zwischen jeder einzelnen Beobachtung und dem Mittelwerth in's Quadrat und

addirt die entstehenden Zahlen zu einander. Die Summe durch die um 1 verminderte Anzahl der einzelnen Beobachtungen dividirt, gibt das mittlere Fehlerquadrat; die Quadratwurzel aus diesem den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung. Dividirt man den letzteren endlich durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen, so erhält man den sogenannten mittleren Fehler des Resultates.

Die Multiplication des mittleren Fehlers mit 0,6745 (oder $\frac{27}{40}$, oder auch meistens genügend genau mit $\frac{2}{3}$) gibt den wahrscheinlichen Fehler. Der letztere Ausdruck will sagen, dass mit gleicher Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, der wirkliche, unbekannte Fehler des gefundenen Werthes sei kleiner, wie er sei grösser als der in dieser Weise abgeleitete „wahrscheinliche Fehler." Was das Vorzeichen des Fehlers betrifft, so ist es im Allgemeinen ebenso wahrscheinlich, dass der gefundene Werth zu gross als dass er zu klein ist, was man durch ein dem Fehler vorgesetztes $\pm$ Zeichen anzudeuten pflegt.

Bezeichnen wir also durch

n die Anzahl der einzelnen Bestimmungen,

$\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ die Abweichungen derselben von dem arithmetischen Mittel,

S die Summe der Fehlerquadrate, d. h.

$$S = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_n^2,$$

so ist der mittlere Fehler der einzelnen Bestimmung

$$= \pm \sqrt{\frac{S}{n-1}};$$

der mittlere Fehler des aus allen als arithmetisches Mittel abgeleiteten Resultates

$$= \pm \sqrt{\frac{S}{n \, . \, (n-1)}};$$

der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Beobachtung

$$= \pm \, 0,6745 \, . \sqrt{\frac{S}{n-1}};$$

und der wahrscheinliche Fehler des Resultates

$$= \pm \, 0,6745 \, . \sqrt{\frac{S}{n \, . \, (n-1)}}.$$

Ueber die Fehlerrechnung bei mehreren unbekannten Grössen vgl. (3).

Selbstverständlich wird durch die so berechneten Grössen nur derjenige Theil des Fehlers ausgedrückt, welcher durch die eigentliche Unsicherheit der Beobachtung entsteht, das heisst durch solche Beobachtungsfehler, die eben so häufig einen zu grossen als einen zu kleinen Werth ergeben. Ausserdem können aber constante Fehler vorhanden sein, deren Ursache in den Angaben der Instrumente oder auch darin gelegen sein kann, dass der Beobachter vorwiegend Fehler in einer bestimmten Richtung macht. Es ist eine besondere Aufgabe, solche Fehler entweder zu ermitteln und dann am Resultat zu corrigiren oder aber solche Combinationen der Beobachtung oder eine derartige Abwechselung der Methoden eintreten zu lassen, dass die constanten Fehler dadurch herausfallen.

Beispiel. Die Dichtigkeit eines Körpers wurde zehnmal bestimmt, wobei die folgenden in der ersten Columne enthaltenen Werthe gefunden wurden.

	Gefunden.	Abweichung δ vom Mittel.	δ^2
	9,662	— 0,0019	0,000004
	9,673	+ 091	083
	9,664	+ 001	000
	9,659	— 049	024
	9,677	+ 131	172
	9,662	— 019	004
	9,663	— 009	001
	9,680	+ 161	259
	9,645	— 189	357
	9,654	— 0,0099	0,000098
Mittel	9,6639		$S =$ 0,001002

Es ist also, da $n = 10$,

der mittlere Fehler einer Bestimmung $= \sqrt{\frac{0,001002}{9}} = \pm\, 0,011$,

„ „ „ des Resultates $= \sqrt{\frac{0,001002}{10 \cdot 9}} = \pm\, 0,0033$,

der wahrscheinliche Fehler einer Bestimmung $= 0,6745 \cdot \sqrt{\frac{0,001002}{9}} = \pm\, 0,0071$,

der wahrscheinliche Fehler des Resultates $= 0,6745 \cdot \sqrt{\frac{0,001002}{10 \cdot 9}} = \pm\, 0,0023$.

Man kann hiernach Eins gegen Eins wetten, dass der Fehler, welchen die einzelne Dichtigkeitsbestimmung dieses Körpers, mit den Instrumenten, der Sorgfalt und der Erfahrung angestellt wie die obigen Beobachtungen,

kleiner ist als 0,0071. Zufällig ist in der That gerade die Hälfte der obigen einzelnen Abweichungen kleiner, die andere Hälfte grösser als dieser Werth.

Der aus einer Reihe von nur 10 Beobachtungen abgeleitete wahrscheinliche Fehler kann nur als eine Annäherung betrachtet werden, so dass die obige Ausrechnung auf zwei Stellen genügt. Ebenfalls hätte anstatt des Factors 0,6745 füglich der Näherungswerth $^2/_3$ gesetzt werden können.

Die obigen Bestimmungen sind von verschiedenen Beobachtern, unter Benutzung verschiedener Gewichtsätze sowie verschiedener Thermometer angestellt worden. Fehler der Wage, welche die Dichtigkeitsbestimmung in einer einseitigen Richtung beeinflussen, sind nicht anzunehmen. Es würden also von diesen Seiten aus constante Fehler vermieden sein. Damit aber wirklich die oben berechneten Fehlergrössen die wahrscheinlichen Fehler darstellen, müsste man u. A. voraussetzen können, dass alle Beobachter gehörig für Entfernung der Luftbläschen gesorgt haben, welche dem Körper bei der Wägung in Wasser leicht anhaften. Sonst würde in den Beobachtungen ein wenn auch nicht constanter doch einseitiger Fehler enthalten sein, denn durch den erwähnten Umstand kann die Dichtigkeit immer nur zu klein gefunden werden. Dieser etwaige Fehler kann sich also nicht in den Abweichungen vom Mittelwerth aussprechen.

2. Einfluss der Beobachtungsfehler auf das Resultat.

Oft finden wir ein Resultat nicht direct durch die Beobachtung, sondern müssen es aus der beobachteten Grösse oder auch aus mehreren solchen durch Rechnung ableiten. So wird die Dichtigkeit eines Körpers aus mehreren Wägungen, der Elasticitätsmodul aus Längenmessungen, die Stärke eines galvanischen Stromes aus dem Ausschlag einer Magnetnadel nach gewissen Formeln berechnet. Hierbei entsteht nun die Aufgabe, zu bestimmen, um wieviel das Resultat fehlerhaft wird, wenn die beobachtete Grösse mit einem gewissen Fehler behaftet ist.

Der Zweck dieser Fehlerrechnung kann erstens das Urtheil über die Genauigkeit des Resultates selbst sein. Ferner erfahren wir dadurch, welche Abkürzungen der Rechnung wir uns erlauben dürfen, ohne die Ungenauigkeit merklich zu vergrössern. Sodann ergibt sich aus ihr, wenn die Messung sich aus mehreren Beobachtungen zusammensetzt, auf welchen Theil wir die grösste Sorgfalt zu verwenden haben. Endlich steht es häufig in unserer Gewalt, die Verhältnisse des Versuches in verschiedener Weise anzuordnen: nur diese Fehlerrechnung gibt den Anhaltspunct, welche Wahl der Verhältnisse die

günstigste ist d. h. den geringsten Einfluss der Beobachtungsfehler auf das Resultat stattfinden lässt.

Solche Betrachtungen sind es, aus denen z. B. die für die Bestimmung der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus gegebene Regel folgt, dass es am günstigsten ist, die beiden Abstände des ablenkenden Magnets im Verhältniss 4 : 3 zu nehmen. Desgleichen gehören hierher die Regeln, dass die Messung der Stärke eines galvanischen Stromes mit der Tangentenbussole den relativ genauesten Werth bei einem Ablenkungswinkel der Magnetnadel von ungefähr 45° liefert; dass die beiden Stromstärken, aus denen der Widerstand oder die elektromotorische Kraft einer galvanischen Säule bestimmt wird, am vortheilhaftesten im Verhältniss 1 : 2 gewählt werden u. s. f.

Bezeichnen wir die beobachtete Grösse durch x, das gesuchte Resultat durch X, so wird X als eine Function von x, d. h. durch irgend einen mathematischen Ausdruck gegeben sein, in welchem x vorkommt. Nennen wir nun f den in x begangenen Fehler, so wird der hierdurch hervorgebrachte Fehler von X, den wir F nennen, gefunden dadurch, dass wir in den Ausdruck, aus welchem X berechnet wird, $x + f$ anstatt x einsetzen. Jetzt werden wir ein von dem richtigen Werthe X etwas verschiedenes Resultat finden: die Grösse dieses Unterschiedes ist offenbar der Fehler F.

In Anbetracht dessen, dass die Beobachtungsfehler kleine Grössen sind, lassen sich diese Rechnungen sehr vereinfachen. So beachte man zunächst folgende Regeln:

1) Es ist zur Bestimmung des Fehlers im Resultate erlaubt, für die beobachtete Grösse, die wir oben x genannt haben, einen genäherten Werth zu setzen. Eigentlich ist man hierzu ja immer gezwungen, weil der genaue, fehlerfreie Werth eben nicht bekannt ist.

2) Correctionsglieder (4), welche in der Formel für das Resultat A vorkommen, können, insofern man nicht etwa deren Einfluss selbst untersucht, bei der Fehlerrechnung vernachlässigt werden.

3) Wenn eine Messung aus mehreren von einander unabhängigen Beobachtungen besteht, so wird das schliessliche Resultat ein aus den einzelnen beobachteten Grössen zusammengesetzter Ausdruck sein. Von diesen können mehrere einen Fehler enthalten. Wenn man aber den Einfluss des in einer Grösse begangenen Fehlers bestimmen will, so braucht man sich um die der andern nicht zu kümmern.

4) Der Fehler im Resultat, welcher aus einem Beobachtungsfehler entsteht, wächst der Grösse des letzteren proportional. Mit anderen Worten: der Fehler des Resultates, die oben durch F bezeichnete Differenz, lässt sich als ein Product darstellen, in welchem der Fehler f der beobachteten Grösse der eine Factor ist.

5) Hieraus folgt auch, dass die Fehler des Resultates, welche aus gleich grossen, aber im entgegengesetzten Sinne begangenen Fehlern einer Beobachtung hervorgehen würden, an Grösse gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Ausserdem kann die Rechnung fast immer sehr gekürzt werden, indem man von Näherungsformeln für das Rechnen mit kleinen Grössen Gebrauch macht. Diese lassen sich mit Hülfe der Differentialrechnung leicht zusammenfassen. Ist f der in dem beobachteten Werthe x begangene Fehler, so wird der Fehler F des Resultates X erhalten, indem man den partiellen Differentialquotienten von X nach x mit f multiplicirt. Also

$$F = f . \frac{\partial X}{\partial x} .$$

Um ohne Differentialrechnung den Ausdruck für den Fehler auf eine einfache Form zu bringen, wird man wenn auch nicht immer, so doch sehr oft den am Schlusse dieses Artikels für die Rechnung mit Correctionsgrössen angegebenen Weg einschlagen können: durch geeignete Umformungen wird zuerst bewirkt, dass der Beobachtungsfehler f nur in einer kleinen zu 1 addirten oder von 1 subtrahirten Grösse vorkommt, worauf die unten gegebenen oder andere geeignete Näherungsformeln zur weiteren Reduction angewandt werden.

Wenn das Resultat aus mehreren Beobachtungs-Daten zusammengesetzt ist, so kann man nach Nr. 3 (v. S.) den Einfluss der einzelnen Fehler abgesondert untersuchen. Jeder von ihnen kann naturgemäss das Resultat entweder zu klein oder zu gross machen, und je nach dem zufälligen Zusammentreffen der Vorzeichen wird der Gesammtfehler grösser oder kleiner ausfallen. Das Fehler-Maximum wird erhalten, wenn man die Partialfehler sämmtlich mit gleichem Vorzeichen nimmt. Den durch das Zusammenwirken wahrscheinlich entstehenden Fehler findet man, indem man die zweiten Potenzen der Partialfehler addirt und aus der Summe

die Wurzel zieht. Die Anwendung dieser Regeln auf einen speciellen Fall wird hinlänglich zur Erläuterung dienen.

Wir wählen als Beispiel die Dichtigkeitsbestimmung eines festen in Wasser untersinkenden Körpers auf dem gewöhnlichen Wege, wo der Körper in der Luft und im Wasser gewogen wird. Wir wollen den Einfluss der Wägungsfehler auf die aus diesen Wägungen abgeleitete Dichtigkeit bestimmen. Nennen wir m das Gewicht des Körpers in der Luft, m' sein Gewicht im Wasser, so ist die Dichtigkeit gleich

$$\frac{m}{m-m'}.$$

Zu dieser Formel kommen freilich noch die von dem Gewichtsverlust in der Luft und von der Ausdehnung des Wassers herrührenden Correctionen hinzu, aber um diese haben wir uns nach Nr. 2 S. 7 bei der blossen Fehlerrechnung nicht zu kümmern.

Nach Nr. 3 dürfen wir die Fehler in m und in m', da beide Beobachtungen von einander unabhängig sind, einzeln betrachten. Untersuchen wir also zuerst den Einfluss eines bei der Wägung in der Luft begangenen Fehlers auf das Resultat. Hätten wir bei dieser Wägung den Fehler f begangen, so würden wir $m+f$ anstatt des richtigen Gewichtes m gefunden haben, würden also die Dichtigkeit erhalten $\frac{m+f}{m+f-m'}$.

Unter Anwendung der Formel 8, S. 12 schreiben wir hierfür

$$\frac{m}{m-m'}\frac{1+\frac{f}{m}}{1+\frac{f}{m-m'}}=\frac{m}{m-m'}\left(1+\frac{f}{m}-\frac{f}{m-m'}\right)=\frac{m}{m-m'}-f\frac{m'}{(m-m')^2}.$$

Das erste Glied des zuletzt geschriebenen Ausdruckes ist aber das fehlerfreie Resultat, wonach also

$$F=-f\frac{m'}{(m-m')^2}$$

den Fehler des Resultates vorstellt, welcher durch den Fehler $+f$ bei der Wägung in der Luft bewirkt wird. Mit andern Worten: wenn man bei der Dichtigkeitsbestimmung eines Körpers, der in der Luft m, im Wasser m' wiegt, das Gewicht in der Luft um f zu gross bestimmt, so wird das Resultat, alles Uebrige als richtig vorausgesetzt, um $f\frac{m'}{(m-m')^2}$ zu klein.

Die Differentialrechnung ergibt ohne Weiteres

$$F=f\frac{\partial\frac{m}{m-m'}}{\partial m}=-f\frac{m'}{(m-m')^2}.$$

Es ist nach Nr. 5 S. 8 überflüssig, eine besondere Untersuchung über den Einfluss eines zu klein gefundenen Gewichtes anzustellen. Wenn der

Fehler der Wägung in der Luft $= -f$ wäre, so würde das Resultat dadurch um $f\frac{m'}{(m-m')^2}$ zu gross werden.

Betrachten wir zweitens den bei der Wägung im Wasser begangenen Fehler, welchen wir durch f' bezeichnen wollen, setzen wir also $m'+f'$ anstatt m', so wird das fehlerhafte Resultat, ähnlich wie oben

$$\frac{m}{m-(m'+f')} = \frac{m}{(m-m')\left(1-\frac{f'}{m-m'}\right)} = \frac{m}{m-m'}\left(1+\frac{f'}{m-m'}\right)$$

$$\text{oder } \frac{m}{m-m'} + f'\frac{m}{(m-m')^2}.$$

Das heisst: dadurch, dass das Gewicht im Wasser um f' zu gross gefunden wird, würde das Resultat um $F' = f'\frac{m}{(m-m')^2}$ zu gross ausfallen.

Fragen wir endlich nach dem Gesammtfehler, welcher aus den beiden Beobachtungsfehlern f und f' zusammengesetzt ist, so hat dieser offenbar den grössten Werth $\pm\frac{m'f+mf'}{(m-m')^2}$, wenn entweder m zu gross und m' zu klein gefunden ist, oder beide umgekehrt. Wahrscheinlich beträgt der Gesammtfehler

$$\pm\sqrt{F^2+F'^2} = \pm\frac{\sqrt{(fm')^2+(f'm)^2}}{(m-m')^2}.$$

Nehmen wir hierzu als Zahlenbeispiel die Dichtigkeitsbestimmung desselben Körpers, von welchem bereits auf S. 5 gesprochen wurde. Wir haben damals die Fehlergrösse aus der Abweichung der einzeln gewonnenen Resultate von ihrem Mittelwerth bestimmt. Jetzt wollen wir sehen, wie grosse Fehler aus der unrichtigen Beobachtung bei dem Wägen zu erwarten sind.

Das Gewicht des Stückes war in runden Zahlen

in der Luft $m = 243600^{mgr}$
im Wasser $m' = 218400^{mgr}$.

Der grösste Wägungsfehler der gebrauchten Wage, bei mässiger Sorgfalt, für Belastungen wie die obige kann auf 5^{mgr}, bei einer Wägung in Wasser, welche wegen der Reibung in dem Wasser weniger genau ist, auf 8^{mgr} geschätzt werden, wonach

$$f = 5^{mgr} \qquad f' = 8^{mgr}.$$

(Die Fehler müssen stets in derselben Einheit angesetzt werden, wie die beobachteten Grössen selbst.)

Die angegebenen Grössen in die obigen Formeln eingesetzt, liefern

als den von m herrührenden Fehler $\pm\frac{5\,.\,218400}{25200^2} = \pm 0{,}0017 = F$

" " " m' " " $\pm\frac{8\,.\,243600}{25200^2} = \pm 0{,}0031 = F'$.

Im ungünstigsten Falle beträgt der Gesammtfehler $\pm$ 0,0048, im wahrscheinlichen Falle aber $\pm \sqrt{F^2 + F'^2} = \pm$ 0,0035.

Wenn also einzelne der obigen Bestimmungen (S. 5) erheblich grössere Abweichungen zeigen, so müssen andere Fehlerquellen als die Unsicherheit der Wägung vorhanden gewesen sein. (Luftbläschen, ungenaue Temperaturbestimmung, fehlerhaftes Abzählen der Gewichtstücke.)

Als zweites Beispiel mag die Messung einer galvanischen Stromstärke i mit der Tangentenbussole dienen. Wenn φ den Ablenkungswinkel der Nadel bezeichnet, so ist

$$i = C.\ \text{tang}\ \varphi,$$

wo C einen für dasselbe Instrument constanten Factor bedeutet. Ist bei der Ablesung des Winkels φ ein Fehler f begangen, so folgt der Fehler F in i aus

$$i + F = C.\ \text{tang}\ (\varphi + f),$$

oder nach Formel 10 III. (unten)

$$i + F = C\left(\text{tang}\ \varphi + \frac{f}{\cos^2\varphi}\right),\ \text{also}$$

$$F = C\frac{f}{\cos^2\varphi} = i\frac{f}{\sin\varphi\cos\varphi} = i\frac{2f}{\sin 2\varphi}.$$

Es ist also $\frac{2f}{\sin 2\varphi}$ der in Bruchtheilen von i ausgedrückte Fehler, welcher dem Ablesungsfehler f entspricht. Hieraus geht eine für den Gebrauch der Tangentenbussole sehr wichtige Regel hervor, nämlich dass Winkel von ungefähr 45° für die Genauigkeit der Messung am günstigsten sind. Derselbe Ablesungsfehler nämlich bringt einen von dem Ausschlag abhängigen relativen Fehler im Resultat hervor, der sowohl für sehr kleine wie für nahe an 90° kommende Ausschläge sehr gross ist und für $\varphi = 45°$ ein Minimum hat.

Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Grössen.

Wenn in einem mathematischen Ausdrucke einzelne Grössen vorkommen, welche jedenfalls gegen andere darin enthaltene sehr klein sind, und welche daher als Correctionsgrössen bezeichnet werden, so kann man den Ausdruck oft durch Anwendung von Näherungsformeln in eine für die Rechnung bequemere Gestalt bringen. Sehr häufig wird es sich dabei als das einfachste empfehlen, dem Ausdruck zunächst eine Form zu geben, welche die Correctionsgrösse nur in einem zu 1 addirten oder von 1 subtrahirten und gegen 1 selbst sehr kleinen Gliede enthält; nicht selten ist diese Form auch schon von vornherein gegeben. Hierauf wird man oft zur Vereinfachung des Ausdrucks von einer der folgenden Formeln Gebrauch machen können.

In diesen Formeln sollen die mit δ, ε, ζ ... bezeichneten Grössen gegen 1 sehr klein sein, und zwar so klein, dass ihre zweiten und höheren Potenzen δ^2, ε^2.... sowie ihre Producte

$\delta . \varepsilon$, $\delta . \zeta$ ...., die ja wieder gegen δ, ε ... selbst sehr klein sind, praktisch gegen 1 vollkommen vernachlässigt werden dürfen.

Ist z. B. $\delta = 0{,}001$, so ist $\delta^2 = 0{,}000001$. Wenn etwa ferner $\varepsilon = 0{,}005$ so wird $\delta . \varepsilon = 0{,}000005$. Es kommt oft vor, dass Einflüsse von einigen Tausendteln noch wichtig sind, während einige Milliontel mehr oder einige weniger vollkommen gleichgültig erscheinen. Eine Länge von etwa 1 Meter bis auf Zehntel eines Millimeters genau zu messen, ist meistens sehr leicht. Man wird also nicht eine Correction von ein Tausendtel der Länge, nämlich ein Millimeter vernachlässigen. Ein oder einige Milliontel der ganzen Länge, also Tausendtel Millimeter werden aber in den seltensten Fällen noch von irgend einem praktischen Einfluss sein, da die Beobachtungsfehler viel grösser sind.

Unter dieser Voraussetzung gelten, wie leicht zu zeigen ist, die folgenden Formeln, in denen die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke meist für die Rechnung bequemer sein werden.

Wo einer Grösse das $\pm$ oder $\mp$ Zeichen vorgesetzt ist, soll sie überall in der Formel entweder mit dem oberen oder mit dem unteren Zeichen genommen werden.

$$(1+\delta)^m = 1 + m\delta. \qquad (1-\delta)^m = 1 - m\delta. \qquad (1)$$

Also im einzelnen Falle

$$(1+\delta)^2 = 1 + 2\delta. \qquad (1-\delta)^2 = 1 - 2\delta. \qquad (2)$$

$$\sqrt{1+\delta} = 1 + \tfrac{1}{2}\delta. \qquad \sqrt{1-\delta} = 1 - \tfrac{1}{2}\delta. \qquad (3)$$

$$\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta. \qquad \frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta. \qquad (4)$$

$$\frac{1}{(1+\delta)^2} = 1 - 2\delta. \qquad \frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + 2\delta. \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \tfrac{1}{2}\delta. \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} = 1 + \tfrac{1}{2}\delta. \text{ u. s. w.} \qquad (6)$$

$$(1 \pm \delta)(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \zeta)\ldots = 1 \pm \delta \pm \varepsilon \pm \zeta \ldots \qquad (7)$$

$$\frac{(1 \pm \delta)(1 \pm \zeta)\cdots}{(1 \pm \varepsilon)(1 \pm \eta)\cdots} = 1 \pm \delta \pm \zeta \ldots \mp \varepsilon \mp \eta \ldots \qquad (8)$$

So kann man auch anstatt des geometrischen Mittels zweier nur wenig verschiedener Grössen p_1 und p_2 das arithmetische setzen

$$\sqrt{p_1 p_2} = \frac{p_1 + p_2}{2}. \qquad (9)$$

Bequem sind ferner die trigonometrischen Näherungsformeln

$$\sin(x+\delta) = \sin x + \delta \cos x, \qquad \cos(x+\delta) = \cos x - \delta \sin x,$$

$$\operatorname{tang}(x+\delta) = \operatorname{tang} x + \frac{\delta}{\cos^2 x}, \qquad (10)$$

in denen δ einen kleinen Winkel bedeutet, gemessen nach dem Winkel (57^0, 3) gleich Eins, für welchen der Bogen dem Radius gleich ist.

3. Bestimmung empirischer Constanten mit kleinsten Quadraten.

Wenn eine und dieselbe Grösse wiederholt direct gemessen worden ist, so liefert das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten richtigen Werth. Nun aber ist häufig die gesuchte Grösse nicht das direct gemessene Object, sondern muss aus den Beobachtungen nach bekannten physikalischen Gesetzen durch Rechnung abgeleitet werden, und alsdann genügt das arithmetische Mittel nicht immer, um aus wiederholten Messungen das wahrscheinlichste Resultat zu finden.

Mathematisch betrachtet, kommt hier die gesuchte Grösse als eine Constante in einer Gleichung vor, welche ausserdem die beobachteten Grössen enthält. Nicht selten sind in dieser Gleichung noch andere unbekannte Constanten vertreten, die gleichzeitig bestimmt oder wenigstens eliminirt werden müssen. Zu diesem Zwecke werden also mindestens so viele Beobachtungen verlangt, als unbekannte Grössen vorkommen; und wenn gerade nur diese Anzahl vorliegt, so werden durch das Einsetzen der beobachteten Werthe in den mathematischen Ausdruck so viele Gleichungen wie Unbekannte gewonnen, aus denen die Letzteren auf gewöhnlichem Wege bestimmt werden. Aber wenn im Interesse der Genauigkeit eine grössere Anzahl von Beobachtungen angestellt worden ist, so muss man, um alles Material auszunutzen, einen anderen Weg einschlagen, eine Arbeit, die durch allerlei Kunstgriffe erleichtert werden kann, besonders dadurch, dass man die Beobachtungen einem zum Voraus bestimmten Plane anpasst.

Jedoch verlangen diese Kunstgriffe eine sehr sorgfältige und umsichtige Ueberlegung, um Willkür auszuschliessen, und lassen nicht selten ganz im Stich. Da ist es sehr wichtig, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Methode der kleinsten Quadrate ein systematisches Verfahren darbietet, nach welchem ohne Willkür gerechnet werden kann. Freilich mag gleich hervorgehoben werden, dass man auch hier oft auf mühsame Rechnungen geführt wird, und desswegen ist ein wiederholter Hinweis auf die grossen Vortheile am Platze, welche ein vor der Beobachtung vollständig durchdachter Plan liefert.

Als Beispiel wählen wir die einfache Aufgabe, die Länge eines Stabes für 0° Temp. und seine Verlängerung auf 1° Tempera-

turerhöhung aus einer Anzahl von Längenmessungen bei verschiedenen Temperaturen abzuleiten. Nennen wir a die Länge bei 0^0, b die Verlängerung für 1^0, so ist für die Temperatur x die Länge y

$$y = a + bx.$$

a und b sind zwei unbekannte Constanten, zu deren Bestimmung zwei Beobachtungen genügen würden. Hätten wir z. B. für die Temperaturen x_1 und x_2 die resp. Längen y_1 und y_2 beobachtet, so ist

$$y_1 = a + bx_1 \qquad y_2 = a + bx_2,$$

$$\text{also } a = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2} \qquad b = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Nun aber mögen mehr als zwei Beobachtungen vorliegen, nämlich ausser den obigen noch die Paare x_3, y_3 x_4, y_4 u. s. w. Wären die Beobachtungen fehlerfrei, so würden die gesuchten Grössen a und b aus irgend welchen zwei Paaren berechnet, dieselben Zahlenwerthe annehmen; und umgekehrt: jeder Werth von y aus dem zugehörigen x nach der Formel mit diesen Constanten berechnet, müsste mit dem beobachteten Werthe identisch sein. In Wirklichkeit aber finden wir der Fehler wegen keine Zahlen für a und b, die den sämmtlichen Beobachtungen völlig genügten.

Der Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate sagt: Die Constanten sollen so bestimmt werden, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Das heisst: Je nach verschiedenen Zahlenwerthen der Constanten werden die mit letzteren aus dem Gesetz berechneten Werthe von den beobachteten um verschiedene Grössen (die Fehler) abweichen. Die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten sind diejenigen, bei denen die Summe der zweiten Potenzen aller Abweichungen die möglichst kleine Zahl wird.

Bezeichnen wir den mathematischen Ausdruck von bekannter Form, welcher die Abhängigkeit der beobachteten Grösse y von einer anderen x (oder auch von mehreren anderen) darstellt, durch den allgemeinen Ausdruck $f(x)$, so kommen hierin also die gesuchten Grössen als Constanten vor, die wir durch $a, b \ldots$ bezeichnen. Unsere Gleichung also ist

$$y = f(x).$$

Beobachtet seien mehrere Werthe $y_1\, y_2 \ldots\ldots y_n$, welche zu den bekannten Werthen $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ gehören. Nach obigem Satze sollen die Zahlenwerthe von $a, b \ldots$ so bestimmt werden, dass wenn man sie in $f(x)$ einsetzt, die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen den möglichst kleinen Werth erhält. Also es soll sein

$$(y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \ldots + (y_n - f(x_n))^2 = \text{Min.}$$

oder kurz durch das Summenzeichen Σ bezeichnet

$$\Sigma (y - f(x))^2 = \text{Min.}$$

Es ist im Auge zu behalten, dass sämmtliche x und y bekannte, beobachtete Grössen sind.

Nach einem Satze der Differentialrechnung führt diese Bedingung auf ebensoviele Gleichungen als zu bestimmende Grössen $a, b \ldots$ vorhanden sind. Wir differenziren den Ausdruck $\Sigma (y - f(x))^2$ nach $a, b \ldots$, indem wir letztere Grössen als Veränderliche behandeln, und setzen jeden partiellen Differentialquotienten gleich Null.

Die Gleichungen, aus denen $a, b \ldots$ zu bestimmen sind, werden also

$$\frac{\partial\, \Sigma (y - f(x))^2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial\, \Sigma (y - f(x))^2}{\partial b} = 0 \text{ u. s. w.}$$

So ist ein von Willkür freier Weg gefunden, auf welchem beliebig viele Beobachtungen gleichmässig benutzt werden können.

Freilich kommt es vor, dass bei complicirterer Gestalt von $f(x)$ die durch Differentiation nach $a, b \ldots$ entstehenden Gleichungen nicht direct auflösbar sind. Dann muss man durch Probiren und Annäherungsmethoden die Lösung suchen. In dem wichtigen Falle jedoch, wo $f(x)$ die Form hat $f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots$, ist die directe Lösung immer möglich.

Führen wir die Aufgabe an unserem obigen Beispiel durch. Es seien bei den Temperaturen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ die Stablängen $y_1\, y_2 \ldots y_n$ beobachtet worden. Nach dem Gesetz der Temperaturausdehnung ist $y = a + bx$; also was wir oben durch $f(x)$ bezeichnet haben ist hier $f(x) = a + bx$. Es sollen also a und b so bestimmt werden, dass

$$(y_1 - a - bx_1)^2 + (y_2 - a - bx_2)^2 + \ldots + (y_n - a - bx_n)^2 = \text{Min.}$$

oder kurz $\qquad \Sigma (y - a - bx)^2 = \text{Min.}$

Die Differentiation ergibt

nach a $\qquad \Sigma (y - a - bx) = 0$

nach b $\qquad \Sigma x (y - a - bx) = 0,$

oder indem man berücksichtigt, dass bei n Beobachtungen $\Sigma a = a.n$ ist,

$$\Sigma y \quad an - b\,\Sigma x = 0$$

und $\qquad \Sigma xy - a\,\Sigma x - b\,\Sigma x^2 = 0$

Durch Auflösung dieser Gleichungen auf a und b findet sich

$$a = \frac{\Sigma x\, \Sigma xy - \Sigma y\, \Sigma x^2}{(\Sigma x)^2 - n\, \Sigma x^2}, \qquad b = \frac{\Sigma x\, \Sigma y - n\, \Sigma xy}{(\Sigma x)^2 - n\, \Sigma x^2}.$$

Zum Beispiel sei die Länge eines zu controlirenden Meterstabes durch Vergleichung mit einem Normalmaafsstabe, (dessen Ablesungen nach der für ihn bekannten Temperaturausdehnung bereits auf seine Normaltemperatur reducirt worden seien) gefunden

bei der Temp. $x =$	20^0	40^0	50^0	60^0
die Längen	1000,22	1000,65	1000,90	1001,05 Mm.

Um die Zahlenrechnung zu verkürzen, werden wir als y nur die beobachteten Ueberschüsse der Länge über 1000 Mm. einführen, dann erhalten wir für a auch nur den Ueberschuss der Länge bei 0° über 1 Meter. Die Rechnung stellt sich in folgendem Schema dar:

x	y	x^2	xy
20	+ 0,22	400	4,4
40	0,65	1600	26,0
50	0,90	2500	45,0
60	1,05	3600	63,0
$\Sigma x = 170$	$\Sigma y = 2{,}82$	$\Sigma x^2 = 8100$	$\Sigma xy = 138{,}4$

also ist
$$a = \frac{170 \,.\, 138{,}4 - 2{,}82 \,.\, 8100}{170^2 - 4 \,.\, 8100} = -\, 0{,}196 \text{ Mm.},$$

$$b = \frac{170 \,.\, 2{,}82 - 4 \,.\, 138{,}4}{170^2 - 4 \,.\, 8100} = +\, 0{,}212 \text{ Mm.}$$

Die Länge des Stabes bei 0° ist also 999,804 Mm., und für die Temperatur t

$$999{,}804 + 0{,}0212 \,.\, t.$$

Berechnet man nun hiernach die Längen für 20, 40, 50, 60°, so wird gefunden

x	y berechnet	y beobachtet	Fehler Δ	Δ^2
	mm	mm	mm	
20°	1000,228	1000,22	+ 0,008	0,000064
40	1000,652	0,65	+ 0,002	0004
50	1000,864	0,90	— 0,036	1296
60	1001,076	1,05	+ 0,026	0676
				$\Sigma \Delta^2 = 0{,}002040$

Man kann sich davon überzeugen, dass jede Aenderung von a oder b die Summe der Fehlerquadrate vergrössert.

Ganz das nämliche Verfahren würde angewandt werden, um aus einer Anzahl bei verschiedener Belastung beobachteter Längen eines Stabes den Elasticitätsmodul zu finden oder um den gegenseitigen Gang zweier Uhren aus mehreren Vergleichungen ihres Standes zu bestimmen, — überhaupt da, wo Proportionalität des Zuwachses zweier Grössen stattfindet.

Die Ausdehnung der meisten Flüssigkeiten durch die Temperatur ist ungleichmässig; das Naturgesetz ist aber nicht bekannt. Hier und in vielen ähnlichen Fällen pflegt man als Annäherung eine algebraische Form höheren Grades einzuführen, z. B. $y = a + bx + cx^2$. Die Bestimmung von a, b, c aus beliebig vielen Beobachtungen ist wesentlich die nämliche wie oben.

Den sogenannten mittleren Beobachtungsfehler erhält man bei diesen Aufgaben aus der Summe der Quadrate der Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Grössen, wenn n die Anzahl der Beobachtungen, m diejenige der zu bestimmenden Constanten $a, b \ldots$ bedeutet, als

$$\pm \sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2}{n-m}}.$$

Also in obigem Beispiel, wo $n = 4$, $m = 2$ ist,

$$\pm \sqrt{\frac{0{,}00204}{4-2}} = \pm\, 0{,}032 \text{ Mm.}$$

4. Correctionen und Correctionsrechnungen.

Durch beinahe die ganze praktische Physik ziehen sich als ein gemeinsamer, sehr unbequemer Bestandtheil die Correctionen, welche wegen ihrer Wichtigkeit eine besondere Erwähnung verdienen. Die gesuchten Resultate gehen nämlich fast niemals aus den Beobachtungen ohne Weiteres rein hervor, vielmehr pflegen die letzteren von Nebenumständen beeinflusst zu werden, welche bei genauen Bestimmungen nicht vernachlässigt werden dürfen. Mit dem erhöheten Anspruch auf Genauigkeit wächst sowohl die Anzahl der zu berücksichtigenden Nebeneinflüsse als die Schwierigkeit sie zu eliminiren, so dass oft der wesentlichste Theil der Arbeit durch diese Correctionen hervorgebracht wird. Hier entsteht demnach das Bedürfniss, sich über den Betrag solcher Correctionen leicht orientiren zu können, woran sich die zweite Aufgabe anschliesst, sie auf möglichst einfache Weise, soweit es nöthig ist, in die Rechnung aufzunehmen. Wie weit man in der Berücksichtigung der Correctionen gehen kann, das hängt natürlich von der Grenze ab, welche auch hier durch die mangelhafte Beobachtung sowie durch die unvollkommene Kenntniss der Naturgesetze und der in diesen vorkommenden Zahlenwerthe gesteckt ist.

Anderseits aber ist es oft selbst überflüssig, die Genauigkeit der Correction bis zu dieser Grenze zu führen; es genügt vielmehr offenbar immer, die Genauigkeit soweit zu treiben, dass der vernachlässigte Theil der Correctionen erheblich kleiner wird als der mögliche Einfluss der Beobachtungsfehler auf das Resultat. Hieraus ergeben sich für die Correctionen in Anbetracht ihrer Kleinheit ähnliche abgekürzte Regeln wie wir sie für die Fehlerrechnung entwickelt haben. Die Uebung in diesen oft vorkommenden Rechnungen ist eine wesentliche Vorbedingung des genauen und doch bequemen physikalischen Arbeitens.

Eine der einfachsten physikalischen Messungen ist z. B. die Wägung oder Massenbestimmung. Wenn wir diese von den angeführten Gesichtspuncten aus betrachten, so haben wir zunächst die eigentlichen Beobachtungsfehler, welche aus der Unvollkommenheit unserer Gesichtswahrnehmung und des Urtheils über dieselbe und aus einigen nicht zu berechnenden Mängeln der Wage, wie Reibung, Veränderlichkeit der Hebelarme u. s. w. zusammengesetzt sind. Auch die fehlerfreie Herstellung oder Prüfung eines Gewichtsatzes ist unmöglich. Indessen werden keineswegs besonders ausgezeichnete Instrumente oder feine Beobachtungen vorausgesetzt, damit andere ebenfalls unvermeidliche aber ihrer Grösse nach bestimmbare und daher aus dem Resultat zu eliminirende Fehler in der directen Angabe der Wage merklich werden. Sie zu berücksichtigen ist daher, wo Genauigkeit beansprucht wird, durchaus geboten. Hierher gehört zunächst die Ungleicharmigkeit der Wage, welche wenigstens bei grösseren Gewichten in der Regel einen merklichen Einfluss hat. Sie wird nach den in (**9**) und (**10**) gegebenen schon für den Gebrauch abgekürzten Vorschriften eliminirt.

Zweitens aber erleiden die Gewichtstücke und der zu wägende Körper einen Gewichtsverlust durch die verdrängte Luft, welcher unter Umständen schon bei einer Krämerwage, die bei 1 Kgr. Belastung noch 1 Gr. anzeigt, grösser werden kann als der Wägungsfehler. Um nun diese Correction anzubringen (die Wägung auf den leeren Raum zu reduciren) muss man die Dichtigkeit der Luft kennen, eine innerhalb gewisser Grenzen veränderliche Grösse. Aber obwohl die vollständige Vernachlässigung der Correction nur bei einer sehr

roben Wägung gestattet ist, so lässt sich anderseits leicht überschlagen, dass für gewöhnliche Ansprüche auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft nicht berücksichtigt zu werden brauchen; man darf der Correction einen mittleren Werth zu Grunde legen. Indem man sich dem entsprechend auch auf eine genäherte Ausrechnung der Correction beschränkt, reducirt sich die erhebliche Verbesserung des Resultates auf eine Ueberlegung von etwa einer Minute.

Grösser freilich wird die Arbeit, wenn der mittlere Werth nicht genügt. Dann muss wenigstens die Temperatur und der Barometerstand beobachtet werden, worauf die Dichtigkeit der Luft aus Tab. 6 entnommen werden kann. Bei weiter gesteigertem Anspruch an die Genauigkeit darf aber die am Barometer abgelesene Höhe der Quecksilbersäule nicht als der genaue Barometerstand betrachtet werden, sondern da das Quecksilber sich durch die Temperatur ausdehnt, so ist auch diese wieder zu berücksichtigen (der Barometerstand auf 0^0 zu reduciren; (**20**)). Dasselbe gilt von dem Maafsstabe, mit welchem im Barometer gemessen wird. Auch die Veränderlichkeit der Schwere an der Erdoberfläche wäre in Rechnung zu ziehen. Endlich hängt die Dichtigkeit der Luft von dem immer vorhandenen aber veränderlichen Wassergehalt ab, wesswegen bei sehr feinen Wägungen auch dieser bestimmt und in Rechnung gesetzt werden muss.

Wollte man nun alle diese Beobachtungen und Rechnungen mit vollkommener Schärfe durchführen, so würden sie eine grosse Mühe verursachen. Allein hier tritt das oben Gesagte in Geltung. Nachdem man sich über das verlangte oder erreichbare Maafs der Genauigkeit des Resultates und über den Einfluss der Correctionen orientirt hat, findet man, dass und in wie weit eine Annäherung bei letzteren immer erlaubt ist und gelangt auch hier bei einiger Uebung mit geringer Mühe zum Ziele.

In ähnlicher Weise treten Correctionen in die meisten praktischen Aufgaben ein. Insbesondere ist es die wechselnde Temperatur, welche in mannichfaltiger Weise die Messungen beeinflusst und desswegen häufig zu Correctionen Veranlassung gibt.

Zu der abgekürzten Correctionsrechnung wird meistens

von dem S. 11 beschriebenen Verfahren und den Näherungsformeln S. 12 Gebrauch gemacht werden können. Gelegenheit zur Anwendung liefert fast jede physikalische Aufgabe.

Beispiele.

1) Bekanntlich nennt man 3α den cubischen Ausdehnungscoefficienten einer Substanz, wenn α den linearen bedeutet. Streng genommen ist, sobald die Längen-Dimensionen im Verhältniss $1 + \alpha t$ geändert werden, das Volumenverhältniss $(1 + \alpha t)^3 = 1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3$. Aber für alle festen Körper ist $\alpha < 0{,}00003$, so dass selbst für Temperaturänderungen von 100^0 der vernachlässigte Theil $3\alpha^2 t^2 < 0{,}000027$ oder $\frac{1}{37000}$ des Ganzen ist. Also nur wann so kleine Grössen in Betracht kommen, dürfte man die abgekürzte Rechnung nicht anwenden. Dann müsste aber auch in Rechnung gezogen werden, dass der Ausdehnungscoefficient selbst sich mit der Temperatur ein wenig ändert. Ganz ohne merklichen Einfluss wird $\alpha^3 t^3$.

2) In (**20**) behandeln wir die Ausdehnung des Quecksilbers als Correctionsgrösse, indem wir bei der Reduction eines Barometerstandes auf 0^0 $\frac{l}{1 + 0{,}00018 \,.\, t} = l - 0{,}00018 . lt$ (Formel 4. S. 12) setzen. Dabei vernachlässigen wir höhere Potenzen von $0{,}00018 \,.\, t$. Man sieht aber, dass schon die nächste für $t = 30^0$ nur 0,00003, also mit $l = 760^{\mathrm{mm}}$ multiplicirt nur etwa $^1/_{45}$ Mm., eine fast immer zu vernachlässigende Grösse beträgt.

Unerlaubt dagegen würde es sein, die Ausdehnung der Gase, welche etwa 20 mal grösser ist, als Correction zu behandeln.

3) Wird das Gewicht eines Körpers, um die Ungleicharmigkeit der Wage zu eliminiren, durch Doppelwägung (**10**) bestimmt, und hat man auf der einen Seite das Gewicht p_1, auf der anderen p_2 gefunden, so ist streng genommen $\sqrt{p_1 p_2}$ das wirkliche Gewicht. Anstatt dieses geometrischen Mittels kann aber ohne Bedenken immer das arithmetische $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ gesetzt werden (Formel 9. S. 12). Denn setzen wir $p_1 = p + \delta$, $p_2 = p - \delta$, wo eben $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ ist, so wird

$$\sqrt{p_1 p_2} = \sqrt{p^2 - \delta^2} = p\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{p^2}} = p\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{p^2}\right) \text{ (Formel 3).}$$

Nun müsste eine Wage sehr schlecht justirt sein, wenn δ den Werth $\frac{1}{1000}p$ erreichte. In diesem Falle wäre $\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{p^2} = \frac{1}{2}$ Milliontel, eine Grösse, welche im Verhältniss zu 1 jedenfalls nicht in Betracht kommt, wenn man mit einer solchen Wage wägt.

Andere Beispiele finden sich später unter den einzelnen Aufgaben.

5. Regeln für das Zahlenrechnen.

Die numerische Berechnung der Resultate kann immer nur mit einer beschränkten Anzahl von Ziffern ausgeführt werden, was bei den meisten Rechnungsoperationen die vollständige Genauigkeit unmöglich macht. Auch hier ist es wichtig, die verlangte Genauigkeit ohne überflüssige Mühe und Zeit zu erreichen.

Im Allgemeinen halte man die Regel fest, das Resultat in so vielen Ziffern mitzutheilen, dass die letzte von ihnen wegen der Beobachtungsfehler keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, dass die vorletzte aber noch für ziemlich richtig gelten kann. Im zweifelhaften Falle soll eher eine Stelle zu viel als eine zu wenig genommen werden.

Der Rechnung nach aber sollen alle mitgetheilten Ziffern richtig sein. Hieraus folgt, dass wenigstens eine längere, beispielsweise logarithmische Rechnung mit einer Stelle mehr geführt werden muss, als man im Resultat mittheilen will; denn durch das Vernachlässigen der späteren Ziffern kann die letzte Stelle nach und nach um einige Einheiten falsch werden. Daher wirft man sie schliesslich im Resultat fort, wobei man die vorletzte Ziffer, wenn das Weggeworfene mehr als 5 beträgt, um Eins erhöht.

Bei der Ziffernzahl werden natürlich die angehängten oder die einen Decimalbruch beginnenden Nullen nicht mitgezählt.

Beispiel. Die Bestimmung der Dichtigkeit des schon mehrfach erwähnten Körpers (S. 5 u. 10) liefert im Allgemeinen die zweite Decimale noch ziemlich richtig, die dritte dagegen nicht mehr. Letztere bildet demnach den Schluss. In dem Mittelwerthe aus 10 Beobachtungen dagegen wird eine Decimale mehr anzugeben sein. Zur Berechnung des Resultates einer Bestimmung wird man hier fünfstellige Logarithmen wählen, da 4 Ziffern genau sein sollen.



Aufgaben

der

praktischen Physik.

Aufgaben

der

praktischen Physik.

---

6. Aufstellung und Prüfung einer Wage.

Die hier folgenden Vorschriften beziehen sich, soweit eine besondere Construction in's Auge zu fassen ist, auf die zu chemischen Analysen gebräuchliche Form der Wage.

Einstellung der Wage. In der Regel ist vom Mechaniker eine Wasserwage oder ein Senkel an dem Wagestativ angebracht, welches man zuerst mit den Fufsschrauben einstellt. Wo diese Einrichtung fehlt, setzt man eine Dosenlibelle in den Wagekasten und stellt sie ein.

Nun löst man die Arretirung aus, corrigirt ein etwaiges einseitiges Uebergewicht durch Verstellen des zu dieser Correction bestimmten Laufgewichtes oder durch Auflegen kleiner Gewichtstücke und überzeugt sich, dass die Wage eine stabile Gleichgewichtslage hat. Sollte das Gleichgewicht labil sein (die Wage „umschlagen") so wird zunächst das in der Mitte befindliche Laufgewicht so weit herabgeschraubt, bis diesem Umstande abgeholfen ist.

Die Empfindlichkeit (Grösse des Ausschlages auf 1 Mgr.) kann durch das Hinaufschrauben des genannten Laufgewichtes beliebig regulirt werden. Mit der Empfindlichkeit wächst die Schwingungsdauer, welche bei der gewöhnlichen Form der Wage etwa zwischen 10 und 15^{sec}, (bei den Wagen von Bunge in Hamburg zwischen 6 und 10^{sec}) zu wählen ist. Eine grössere Schwingungsdauer verursacht Zeitverlust beim Wägen und bedingt meistens Unregelmässigkeiten der Einstellung, welche den grösseren Ausschlag nutzlos machen.

Nachdem die passende Schwingungsdauer hergestellt worden, bewirkt man durch Verstellen des längs des Wagebalkens verschiebbaren Laufgewichtes, dass der Zeiger der unbelasteten Wage auf den mittelsten Theilstrich einsteht, resp. nach beiden Seiten gleich weit schwingt. Man braucht übrigens nicht zu

scheuen, nachdem mittels des Laufgewichtes die verlangte Einstellung sehr nahe erreicht ist, die letzte feine Regulirung auf den Nullpunct dadurch zu erleichtern, dass man sie mit den Fufsschrauben der Wage ausführt, wobei die eine um möglichst gleich viel verkürzt wie die andere verlängert wird.

Prüfung der Wage. Auf die Erfüllung folgender Bedingungen durch den Mechaniker ist zu halten, ehe man eine Wage in Gebrauch nimmt.

Wiederholt arretirt und ausgelöst muss die Wage eine unveränderte Einstellung annehmen (vorausgesetzt, dass die drei Schneiden sorgfältig gereinigt sind). Wenn die Wage frei schwingt, darf die Schwingungsweite nur langsam abnehmen. Bei gehobener Arretirung soll der Zeiger gerade über dem mittelsten Theilstrich stehen, und bei dem Senken sollen die beiden Zapfen, auf denen der arretirte Balken ruht, diesen gleichzeitig loslassen.

Die obigen Eigenschaften müssen auch dann noch vorhanden sein, wenn die Wage mit dem grössten Gewicht belastet wird, welches bei ihrem Gebrauch vorkommen soll, insbesondere muss auch für diesen Fall die Stabilität der Gleichgewichtslage, die unveränderte Einstellung und die langsame Abnahme der Schwingungen geprüft werden.

Hierzu kommt noch die Gleicharmigkeit, welche daran erkannt wird, dass (nicht zu kleine) Gewichte, die sich im Gleichgewicht halten, dieselbe Einstellung der Wage geben, nachdem sie mit einander vertauscht worden sind. Ueber die genaue Bestimmung der Gleicharmigkeit und der Empfindlichkeit siehe (8) und (9).

Folgende Nebenpuncte sind bei der Anschaffung einer Wage zu beachten. Die Reiterverschiebung soll mit Anschlägen versehen sein, welche das Anstossen an den Balken verhindern. Die Verschiebung sowie die Arretirung, auch die Thüren des Kastens sollen einen sanften Gang haben. Zur Vermeidung der Parallaxe beim Ablesen spiele die Zeigerspitze sehr nahe vor oder noch besser über der Theilung. Als Grösse des Scalentheils empfiehlt sich etwa das Millimeter. Dass die beiden Wagschalen genau gleiches Gewicht haben ist weniger wichtig, als dass die zu specifischen Wägungen bestimmte kürzere Schale einer der längeren an Gewicht genau gleich sei.

Gebrauch der Wage. Dieselbe soll auf einem vor den Erschütterungen des Fussbodens geschützten Tische stehen. Kann man nicht umhin, im geheizten oder von der Sonne bestrahlten Zimmer zu wägen, so ist die Wage wenigstens vor Ungleichheiten der Erwärmung zu bewahren. Zum Schutz gegen Rost und um hygroskopische Einflüsse während der Wägung möglichst auszuschliessen, dient ein in den Wagekasten gestelltes Gefäss mit Aetzkalk oder Chlorcalciumstücken.

Das Auflegen von Gewichten geschieht nur bei arretirter Wage; bei dem Aufsetzen grösserer Gewichte oder bei dem Entlasten der Wage wird auch die Schalenarretirung, wo eine solche vorhanden ist, angewandt. Pendelschwingungen der Schalen während der Wägung können zu Fehlern Veranlassung geben. Nach jeder Wägung mit grösserer Belastung überzeuge man sich von der Unveränderlichkeit des Nullpunctes oder nehme eine neue Bestimmung desselben vor. Etwa nothwendig werdende kleinere Correctionen können mit den Fufsschrauben der Wage ausgeführt werden.

Selbstverständlich wird die definitive Wägung bei geschlossenem Wagekasten ausgeführt.

7. Wägung durch Beobachtung der Schwingungen einer Wage.

Das gewöhnliche Wägungsverfahren, wobei man Gewichte auflegt, resp. schliesslich den Reiter verschiebt, bis der Zeiger der Wage gleich weite Schwingungen nach beiden Seiten vom mittelsten Theilstrich macht, leidet an mehreren Mängeln. Erstens setzt es voraus, dass bei unbelasteter Wage der Zeiger genau auf den mittelsten Theilstrich einsteht, verlangt also wegen der unvermeidlichen Wandelbarkeit des Nullpunctes ein oft wiederholtes zeitraubendes Einstellen der Wage. Sodann ist es nur bei einer mit Reiterverschiebung versehenen Wage anwendbar. Drittens ist das Probiren zeitraubend und erfordert mehrere sorgfältige Beobachtungen, welche doch nicht zur Ermittelung des Resultates benutzt werden. Endlich soll, wo es möglich ist, eine feine Messung nicht auf das Probiren, ob zwei Grössen gleich sind, gestützt werden, da die Gleichheit

nur näherungsweise erreichbar ist; vielmehr soll man immer die Frage stellen, um wieviel sie verschieden sind.

Diesen Einwänden entgeht das nachfolgende Verfahren der Wägung durch Schwingungsbeobachtung und Interpolation. Eine ähnliche Methode kann bei vielen anderen physikalischen Messungen mit denselben Vortheilen wie bei der Wage, d. h. mit Vereinfachung der verlangten Hülfsmittel, grösserer Ausnutzung der Empfindlichkeit und häufig mit Zeitersparniss angewandt werden.

Erste Aufgabe ist die Bestimmung des Nullpunctes worunter wir den Punct der Scale verstehen, auf welchen der Zeiger bei unbelasteter Wage einsteht. Da man um ihn zu bestimmen, nicht warten kann und darf, bis Ruhe eingetreten ist, so muss man ihn aus einigen Umkehrpuncten des schwingenden Zeigers ableiten.

Für mässige Genauigkeit genügt es hierbei, zwei auf einander folgende Umkehrpuncte zu beobachten und aus ihnen das arithmetische Mittel zu nehmen. Verlangt man grössere Genauigkeit und will man Rücksicht darauf nehmen, dass die Schwingungen allmählich kleiner werden, so beobachte man mehrere Umkehrpuncte auf beiden Seiten, wobei zur Vereinfachung der Reductionen die Schwingung nach derselben Seite den Anfang und den Schluss bilde, d. h. man mache eine ungerade Zahl Beobachtungen. Fünf oder sieben sind immer genügend. Alsdann wird das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen auf der einen Seite d. h. aus Nr. 1. 3. 5. und aus denen auf der anderen Seite d. h. aus Nr. 2. 4. genommen und aus diesen beiden Zahlen wiederum das Mittel. Dieses ist der gesuchte Nullpunct. Damit man nicht nöthig habe, die Ausschläge nach rechts und links durch das Vorzeichen zu unterscheiden, bezeichnen wir den mittelsten Theilstrich der Wage nicht mit Null, sondern mit 10.

Beispiel.

	Umkehrpuncte.					Mittel.	Nullpunct.
Nr.	1.	2.	3.	4.	5.		
	10,4		10,3		10,3	10,33	9,74
		9,1		9,2		9,15	

Nachdem nun einerseits der Körper und anderseits, durch fortgesetztes Einschliessen in immer engere Grenzen (möglichst durch Halbiren), eine solche Zahl von Gewichtstücken auf-

gelegt, resp. schliesslich der Reiter auf einen vollen Theilstrich aufgesetzt ist, dass die Einstellung nur um ein Weniges (bis zu 1 oder 2 Scalentheilen) vom Nullpunct verschieden ist, macht man wieder nach obigem Schema einen Satz von Schwingungsbeobachtungen. Darauf nimmt man ein oder einige Milligramme fort oder legt zu, je nachdem die Gewichte zu schwer oder zu leicht waren, so dass die Einstellung auf die andere Seite vom Nullpunct fällt und bestimmt dieselbe wieder durch die Beobachtung einiger Umkehrpuncte.

Das gesuchte Gewicht des Körpers p_0, d. h. die Anzahl Gewichtstücke, welche man auflegen muss, damit die belastete Wage auf den Nullpunct zeigt, wird durch eine einfache Interpolation aus diesen Beobachtungen erhalten.

Es sei gefunden worden der Nullpunct e_0,
bei der Belastung P die Einstellung E,
" " " p " " e,

so hat man, weil für kleine Ausschläge die Differenz der Einstellungen der Differenz der Gewichte proportional ist,

$$\frac{e_0 - e}{E - e} = \frac{p_0 - p}{P - p},$$

$$\text{also } p_0 = p + (P - p) . \frac{e_0 - e}{E - e}.$$

Selbstverständlich sind die obigen Differenzen sämmtlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen zu nehmen, wobei eine Erleichterung darin besteht, die Scalentheile nach derjenigen Richtung wachsend zu zählen, welche einer Zunahme der Belastung entspricht.

Etwas übersichtlicher lässt sich das Verfahren auch so aussprechen. Die beiden Beobachtungen mit den verschiedenen Belastungen liefern den Unterschied a der Einstellung (den Ausschlag), welcher 1 Mgr. Zunahme der Belastung entspricht. Indem man ferner durch Subtraction die Scalentheile A bestimmt, um welche eine der Einstellungen mit Belastung (gleichgültig welche, nur wird man zur Vereinfachung der Rechnung die dem Nullpuncte nächste wählen) vom Nullpunct unterschieden ist, findet man die Anzahl Milligramme, welche man hätte zulegen (oder wegnehmen) müssen, damit die Wage

auf den Nullpunct einsteht, durch Division $= \frac{A}{a}$. — Vergl. auch den Anfang des nächsten Artikels.

Beispiel: Als Nullpunct sei der obige Werth 9,74 gefunden. Nach Auflegung des Körpers wurde beobachtet

Belastung.	Umkehrpunkte.	Mittel.	Einstellung.
3036 mgr.	7,8 7,8 7,9 10,3 10,2	7,83 10,25	9,04
3037 mgr.	9,5 9,4 9,3 10,5 10,5	9,40 10,50	9,95

Ausschlag auf 1 mgr. = 0,91 Sc. Th.

3037 mgr. waren folglich zu schwer um $\frac{9.95 - 9,74}{0,91} = \frac{0,21}{0,91} = 0,23$ mgr.

Gewicht $p_0 = 3036,77$ mgr.

Oder nach obiger Formel berechnet

$$p_0 = 3036 + \frac{1.0,70}{0,91} = 3036,77 \text{ mgr.}$$

Bei einiger Uebung spart man durch diese Beobachtungsweise gegenüber der gewöhnlichen an Zeit, da die Ausführung der Reductionen bald ganz mechanisch geschieht, während die Genauigkeit eine grössere ist. — Der Schwingungsbogen betrage etwa zwischen 1 und 4 Scalentheilen. — Ob man die Gewichte nach Grammen oder nach Milligrammen zählen will ist gleichgültig, nur gewöhne man sich an einen bestimmten Modus. — Auch das Protocoll der Beobachtungen soll nach einem bestimmten Schema z. B. dem obigen geführt werden.

8. Bestimmung der Empfindlichkeit einer Wage.

Empfindlichkeit der Wage nennen wir die Differenz der Einstellungen für 1 mgr. Unterschied in der Belastung einer Schale. Die Bestimmung dieser Grösse für verschiedene Belastungen ist als Kennzeichen für die Güte der Wage und ferner zur Vereinfachung der Wägungsmethode von Wichtigkeit. Besitzt man nämlich eine Tabelle, in welcher der Ausschlag auf 1 mgr. für die verschiedenen Belastungen angegeben ist, so genügt für jede Wägung, ausser der Bestimmung des Nullpunctes, eine einzige Beobachtung der Einstellung mit angenähert richtigen Gewichten.

Das Verfahren ergibt sich von selbst. Man setzt auf beide Schalen die Belastung, für welche man die Empfindlichkeit

bestimmen will, und auf eine der Schalen ein kleines Uebergewicht, so dass die Einstellung um einige (2 bis 4) Scalentheile vom mittelsten Theilstrich abweicht. Diese Einstellung *e* wird nach dem vorigen Artikel genau beobachtet. Nun bringt man durch Mehrbelastung der anderen Schale um *a* Milligramme eine Einstellung, um ungefähr ebensoviele Theilstriche nach der anderen Seite entfernt, hervor und beobachtet dieselbe. Sie sei e', dann ist die gesuchte Empfindlichkeit $= \frac{e - e'}{a}$.

Hat man diese Grösse für verschiedene Belastungen (bei der gewöhnlichen Analysenwage etwa von 10 zu 10 gr. auf jeder Schale fortschreitend) bestimmt, so stellt man die Resultate durch Eintragen in Coordinatenpapier graphisch dar, als Abscisse die Belastung, als Ordinate die Empfindlichkeit, verbindet die entstehenden Puncte durch eine Curve und kann nun entweder diese direct benutzen, oder aus ihr eine Tabelle für passende Intervalle der Belastung entnehmen.

Ueber die Regulirung der Empfindlichkeit siehe (6). — Wie dieselbe von der Belastung abhängt, das richtet sich nach der gegenseitigen Stellung der mittleren und der beiden Endschneiden. Aus Zweckmässigkeitsgründen wird in der Regel für feinere Wagen eine von der Belastung unabhängige Empfindlichkeit gewünscht, welche Eigenschaft voraussetzt, dass die drei Schneiden in einer Ebene liegen. Da nun diese Bedingung wegen der Durchbiegung des Balkens streng genommen nur für eine bestimmte Belastung erfüllt sein kann, so pflegen sorgfältige Mechaniker sie für eine mittlere Belastung herzustellen. Dann findet man anfangs eine kleine Steigerung der Empfindlichkeit mit der Belastung, für grössere Gewichte dann eine Abnahme. — Unter Belastung kurzweg pflegt man diejenige der einzelnen Schale zu verstehen.

9. Bestimmung des Verhältnisses der Wagebalken.

Die beiden Wagearme verhalten sich umgekehrt wie die Gewichte, welche als gleichzeitige Belastung der resp. Schalen die Wage auf den Nullpunct (7) einstellen. Da im Allgemeinen die vollkommene Richtigkeit des Gewichtsatzes nicht vorausgesetzt werden darf, so schlägt man folgenden Weg ein.

Man beobachte den Nullpunct. Man setze auf beide Schalen Gewichtstücke von gleichem Nennwerth, etwa gleich der Hälfte des Maximums, welches die Wage tragen darf, und gleiche dieselben durch Milligrammstücke oder durch den Reiter bis zum Einstehen der Wage ab, wobei im Interesse der Genauigkeit das Interpolationsverfahren (7) angewandt werde. Alsdann werden die Gewichte umgesetzt und wieder abgeglichen. Bezeichnen wir die beiden Gewichte mit p und P und haben wir gefunden, dass die Wage einsteht, wenn

	links	rechts
bei der einen Wägung	$p + l$	P
„ „ anderen „	P	$p + r$

so ist, die Länge des linken Wagebalkens mit L, die des rechten mit R bezeichnet,

$$\frac{R}{L} = 1 + \frac{l - r}{2p}.$$

Ein kleines Uebergewicht auf der einen Schale kann dabei als negatives Uebergewicht auf der anderen behandelt werden; siehe Beispiel 1.

Beweis: Nach dem Hebelgesetz ist

$$L(p + l) = RP$$
$$LP = R(p + r),$$

woraus nach S. 12 Formel 8 und 3

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p+l}{p+r}} = \sqrt{\frac{1+\frac{l}{p}}{1+\frac{r}{p}}} = 1 + \frac{l-r}{2p}.$$

1. Beispiel. Wage von 100 Gr. Tragfähigkeit auf jeder Schale.

Links	Rechts
(50 gr.)	(20 + 10 + ···) + 0,83 mgr.
(20 + 10···)	(50) + 2,56 mgr.

$$l = -0{,}83 \quad r = 2{,}56$$

$$\frac{R}{L} = 1 + \frac{-0{,}83 - 2{,}56}{100000} = 1 - 0{,}0000339$$

$$\text{oder } \frac{L}{R} = 1{,}0000339.$$

2. Beispiel. Wage von 500 Gr. Tragfähigkeit.

Links	Rechts
(100 + 100 gr.) + 3,3 mgr.	(200)
(200)	(100 + 100) + 0,7 mgr.

$$l = 3{,}3 \qquad r = 0{,}7$$

$$\frac{R}{L} = 1 + \frac{3{,}3 - 0{,}7}{400000} = 1{,}0000065.$$

In obigen Beispielen bedeuten die eingeklammerten Zahlen die mit diesen Ziffern bezeichneten Grammstücke. — Der Nullpunct ist wegen der grossen Belastungen vor und nach jeder Wägung zu bestimmen. Findet man erhebliche Aenderungen, so wiederhole man die betreffende Wägung; andernfalls nimmt man als den für die Wägung gültigen Nullpunct das Mittel aus der vorhergehenden und nachfolgenden Bestimmung. — Vergl. auch die Anm. zum folg. Abschnitt.

Aus der ersten Bestimmung folgt zugleich (vgl **12**)

$$(50) = (20 + 10 + \cdots) - 0{,}86 \text{ mgr.}$$

aus der zweiten

$$(200) = (100 + 100) + 2{,}0 \text{ mgr.}$$

10. Absolute Wägung eines Körpers.

Man eliminirt die Ungleicharmigkeit der Wage, wenn man das scheinbare bei der Wägung gefundene Gewicht multiplicirt mit dem Verhältniss der Wagearme, als Zähler die Länge des Armes, an welchem die Gewichtstücke wirkten.

Kennt man dieses Verhältniss nicht, so kann man auf zweierlei Weise verfahren.

1) Man führt eine Doppelwägung aus, bei welcher man einmal den Körper auf die rechte Schale, das anderemal auf die linke Schale setzt. Wenn wieder R und L die Längen des rechten und linken Armes bezeichnen, ferner p_1 und p_2 die Gewichtstücke, welche auf die rechte resp. die linke Schale gesetzt dem Gewichte des Körpers das Gleichgewicht hielten, so ist das gesuchte Gewicht P des Körpers das arithmetische Mittel

$$P = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

Beweis siehe S. 20, Nr. 3.

Zugleich findet man das Verhältniss der Wagebalken hierdurch

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}} = 1 + \frac{p_2 - p_1}{2p_1}.$$

2) Tarirmethode. Der Körper auf einer Schale wird durch irgend eine Belastung der anderen Schale äquilibrirt,

alsdann weggenommen und durch Gewichtstücke bis zur gleichen Einstellung der Wage ersetzt. Letztere geben sein Gewicht.

Die Tarirung ist einfacher, insofern der Nullpunct der Wage gleichgültig ist; bei der Doppelwägung wird durch die zweimalige Beobachtung der Einfluss der Wägungsfehler vermindert.

11. Reduction der Wägung auf den leeren Raum.

Der Zweck einer Wägung ist die Bestimmung der Masse eines Körpers, d. h. ihre Vergleichung mit der Masse der Gewichtstücke. Die Vergleichung zweier Massen von verschiedener Dichtigkeit ist nur dann durch die Vergleichung ihrer Gewichte gegeben, wenn man die Wägung im leeren Raum ausführt. In der Luft erleiden sowohl Körper als Gewichtstücke einen Verlust an Gewicht gleich dem Gewicht der verdrängten Luft.

Nennt man

m das scheinbare Gewicht des Körpers in der Luft, d. h. die Gewichtstücke, welche ihm in der Luft das Gleichgewicht halten,

λ die Dichtigkeit der Luft ($\lambda = 0{,}0012$ im Mittel. Siehe auch (18) und Tab. 6),

Δ die Dichtigkeit des Körpers,

δ die Dichtigkeit der Gewichtstücke,

so ist das Gewicht im leeren Raume

$$M = m\left(1 + \frac{\lambda}{\Delta} - \frac{\lambda}{\delta}\right).$$

Es ist also zu dem gefundenen scheinbaren Gewicht m hinzuzufügen $m\lambda\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\delta}\right)$, eine Correction, welche desto grösser ist, je grösser der Unterschied von Δ und δ. Es genügt fast immer, den mittleren Werth 0,0012 für λ zu setzen. Die Correction kann in diesem Falle für Messinggewichte aus Tab. 8. entnommen werden.

Beweis. Das Volumen des Körpers ist $V = \frac{M}{\Delta}$, dasjenige der Gewichtstücke $v = \frac{m}{\delta}$. Jeder Körper verliert in der Luft so viel an Gewicht, als die von ihm verdrängte Luft wiegt, der gewogene Körper also ver-

liert λV, die Gewichtstücke λv. Da die Gewichte nach Abzug dieser Verluste gleich sind, so ist also

$$M - \lambda V = m - \lambda v \text{ oder } M\left(1 - \frac{\lambda}{\Delta}\right) = m\left(1 - \frac{\lambda}{\delta}\right),$$

also bei der Kleinheit von λ gegen Δ und δ, nach S. 12, Formel 8

$$M = m \frac{1 - \frac{\lambda}{\delta}}{1 - \frac{\lambda}{\Delta}} = m\left(1 - \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\lambda}{\Delta}\right).$$

Beispiel: die Correction des scheinbaren Gewichtes m einer Wassermenge, wenn man mit Messinggewichten ($\delta = 8{,}4$) gewogen hat, beträgt $m \,.\, 0{,}0012\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{8{,}4}\right) = m \,.\, 0{,}00106$ d. h. 1,06 Mgr. auf jedes Gramm.

Auch wo es nicht auf das absolute Gewicht, sondern nur auf Gewichtsverhältnisse ankommt, wie bei chemischen Analysen, muss der Gewichtsverlust in der Luft berücksichtigt werden. Doch vernachlässigt man alsdann den Gewichtsverlust der Gewichtstücke. Die durch Druck- und Temperaturschwankungen verursachten Aenderungen in der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bewirken nämlich bei Messinggewichten einen Fehler, welcher den Betrag von $\frac{1}{100000}$ des Gesammtgewichts nur in extremen Fällen erreicht. Analysirt man z. B. eine verdünnte Silberlösung durch die Wägung eines Quantums Lösung und des daraus erhaltenen Chlorsilbers (Dichtigkeit = 5,5), und sind P und p die von der Wage angegebenen Gewichte, so sind die auf den leeren Raum reducirten $P(1 + 0{,}0012)$ und $p\left(1 + \frac{0{,}0012}{5{,}5}\right)$. Der Chlorsilbergehalt beträgt also

$$\frac{p \,.\, \left(1 + \frac{0{,}0012}{5{,}5}\right)}{P \,.\, (1 + 0{,}0012)} = \frac{p}{P}\left(1 - 0{,}0012 \,.\, \left(1 - \frac{1}{5{,}5}\right)\right) = \frac{p}{P} \,.\, 0{,}9990.$$

Der uncorrigirte Werth $\frac{p}{P}$ würde also um 0,1% zu gross sein. Die gewöhnliche Vernachlässigung solcher einfacher Correctionen muss Angesichts der Kostbarkeit der Wage, der auf die Wägungen verwandten Sorgfalt und des meistens durch die grosse Zahl der mitgetheilten Decimalen erhobenen Anspruchs auf Genauigkeit als unstatthaft bezeichnet werden.

12. Correctionstabelle eines Gewichtsatzes.

Allgemein kommt die Aufgabe, die Fehler eines Gewichtsatzes zu bestimmen, darauf hinaus, dass man sich durch Ausführung so vieler Wägungen, als Gewichte zu prüfen sind,

eben so viele Gleichungen bildet, aus denen das Verhältniss der Wagearme und dasjenige der Gewichte zu einander abgeleitet wird.

Bei dem zu Analysen gewöhnlich gebrauchten Gewichtsatz kann man nach folgendem Schema verfahren. Wir bezeichnen die grösseren Stücke mit

$$50'\ 20'\ 10'\ 10''\ 5'\ 2'\ 1'\ 1''\ 1'''.$$

Man führe eine Doppelwägung mit 50′ einerseits und der Summe der übrigen Gewichte andererseits aus. Man habe gefunden, dass die Wage einsteht (der Zeiger in der Stellung ist, welche er bei unbelasteter Wage einnimmt), wenn

Links	Rechts
$50'$	$20' + 10' + \cdots + r$ mgr.
$20' + 10' + \cdots + l$ mgr.	$50'$

so ist das Verhältniss der Wagearme (9)

$$\frac{R}{L} = 1 + \frac{l-r}{100000}$$

und $$50' = 20' + 10' + \cdots + \frac{r+l}{2}.$$

Nachdem $\frac{R}{L}$ ermittelt worden ist, genügt für die anderen Stücke eine einzelne Wägung, denn ein Stück p, rechts aufgelegt, bedeutet auf die Balkenlänge der linken Seite reducirt, $p \cdot \frac{R}{L}$.

Beispiel: Es sei $r = -0{,}83 \quad l = +2{,}53$ mgr,

so ist $$50' = 20' + 10' + \cdots + 0{,}85 \text{ mgr.}$$

und $$\frac{R}{L} = 1{,}0000336.$$

Ferner sei bei der Vergleichung des 20-Grammstückes mit der Summe der beiden Zehner gefunden, dass die Wage einsteht, wenn

links	rechts
$20' + 0{,}91$ mgr.	$10' + 10''$

so würden an einer gleicharmigen Wage sich das Gleichgewicht halten

$$20' + 0{,}91 \text{ mgr. und } (10' + 10'') \cdot 1{,}0000336$$

oder $$10' + 10'' + 0{,}67 \text{ mgr.}$$

Folglich ist $$20' = 10' + 10'' - 0{,}24 \text{ mgr.}$$

Durch 5 Wägungen habe man so gefunden

$$\begin{aligned} 50' &= 20' + 10' + \cdots + A \\ 20' &= 10' + 10'' \quad + B \\ 10'' &= 10' \quad + C \\ 5' + 2' + 1' + 1'' + 1''' &= 10' \quad + D, \end{aligned}$$

wo natürlich A, B, C, D positiv oder negativ sein können. Aus diesen Gleichungen muss der Werth der fünf Stücke, die Summe der einzelnen Gramme vorläufig als ein Stück betrachtet, in irgend einer Einheit ausgedrückt werden. Man wird, wenn man nicht etwa zugleich eine Vergleichung mit einem Normalgewicht vornimmt, diese Einheit so wählen, dass die Correctionen der einzelnen Stücke möglichst klein werden, und das ist der Fall, wenn man die ganze Summe als richtig annimmt, d. h. wenn man setzt

$$50' + 20' + 10' + \cdots = 100000^{\text{mgr}}.$$

Nun findet man leicht, indem man alle Gewichte zuerst in 10′ ausdrückt,

$$\begin{aligned} 50' + 20' + 10' + \cdots &= 10 \,.\, 10' + A + 2B + 4C + 2D \\ &= 100000^{\text{mgr}}. \end{aligned}$$

also, indem man

$$\frac{A + 2B + 4C + 2D}{10} = S \qquad \text{setzt,}$$

$$\begin{aligned} 10' &= 10000^{\text{mgr}} - S \\ 10'' &= 10000 \;\text{„}\; - S + C \\ 5' + \cdots &= 10000 \;\text{„}\; - S + D \\ 20' &= 20000 \;\text{„}\; - 2S + B + C \\ 50' &= 50000 \;\text{„}\; - 5S + A + B + 2C + D = 50000 + \tfrac{1}{2}A. \end{aligned}$$

Die Probe für die Richtigkeit der numerischen Rechnung ist leicht dadurch gegeben, dass wenn man die Correctionen in Zahlen bestimmt hat, die Summe derselben $= 0$ sein muss, und die obigen 4 Gleichungen erfüllt sein müssen.

Ferner habe man durch Vergleichung der Stücke 5′ 2′ 1′ 1″ 1‴ unter einander gefunden

$$\begin{aligned} 5' &= 2' + 1' + 1'' + 1''' + a \\ 2' &= 1' + 1'' \quad + b \\ 1'' &= 1' \quad + c \\ 1''' &= 1' \quad + d \end{aligned}$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{a + 2b + 4c + 2d + S - D'}{10} = s,$$

so ist ähnlich wie oben

$$\begin{aligned} 1' &= 1000^{mgr} - s \\ 1'' &= 1000 \;,, - s + c \\ 1''' &= 1000 \;,, - s + d \\ 2' &= 2000 \;,, - 2s + b + c \\ 5' &= 5000 \;,, - 5s + a + b + 2c + d. \end{aligned}$$

Ebenso wird mit den kleineren Gewichtstücken verfahren, wobei zu bemerken, dass in der Regel die Ungleicharmigkeit der Wage bei diesen nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht.

Wir haben bisher die Summe aller grösseren Gewichtstücke als richtig angenommen, um die Fehler so klein wie möglich zu erhalten. Für die meisten Arbeiten (Chemische Analyse, Specifisches Gewicht), welche nur relative Wägungen verlangen, ist diese Annahme erlaubt. Um die Fehlertabelle auf richtiges Grammgewicht zu beziehen, ist es nothwendig, die Gewichtstücke oder eins derselben mit einem Normalgewicht zu vergleichen. (**10. 11**). Die Rechnung ergibt sich leicht aus Obigem.

Einen ähnlichen Weg, um etwa einen Gewichtsatz von anderer Anordnung zu prüfen, wird man leicht finden.

Zur Unterscheidung der Gewichtstücke von gleichem Nennwerthe sollten die Ziffern in verschiedener Weise eingeschlagen oder mit einem Index versehen sein; anderenfalls muss man zufällige Merkzeichen aufsuchen. Bei den Blechgewichten hilft man sich durch das Umbiegen verschiedener Ecken. — Auf den Gewichtsverlust in der Luft braucht keine Rücksicht genommen zu werden, weil die grösseren Stücke von gleichem Materiale sind, und bei den kleineren der Unterschied ohne merklichen Einfluss ist. — Zur Prüfung der kleineren Stücke wendet man womöglich eine leichtere, d. h. bei gleicher Schwingungsdauer empfindlichere Wage an. — Die Wägungen sind durch Schwingungsbeobachtung nach (7) auszuführen, wobei die Nullpunctsbeobachtung häufig wiederholt wird. — Gewöhnt man sich daran, alle Gewichtstücke in bestimmter Reihenfolge zu benutzen, so wird jedes Gesammtgewicht immer durch dieselben Stücke dargestellt, man kann also die Fehlertabelle leicht für die Gesammtgewichte berechnen, indem man diese nach Zehntausenden, Tausenden, Hunderten, Zehnern (und eventuell Einern) von Milligrammen abtheilt.

13. Dichtigkeit oder specifisches Gewicht.

Bei einem festen oder tropfbar flüssigen Körper wird unter Dichtigkeit oder specifischem Gewicht (wir bezeichnen diese Grösse durch Δ; s. Tab. 1 und 2) das Verhältniss seiner Masse zu der eines gleichen Volumens Wasser von 4^0 verstanden. Letzteres also hat die Dichtigkeit Eins. Anstatt des Massen-Verhältnisses kann auch das Verhältniss der Gewichte (im leeren Raum) gesetzt werden. Vorausgesetzt, dass man nach dem Meter- und Gramm-System misst, kann man specifisches Gewicht auch das Verhältniss des Gewichtes zum Volumen nennen oder, einen homogenen Körper vorausgesetzt, das Gewicht der Volumeneinheit. Dabei gehören natürlich Mgr. und Mm., Gr. und Cm., Kgr. und Dm. paarweise zusammen.

Unter der Dichtigkeit eines Gases nach dieser Definition wird meistens diejenige verstanden, welche ihm bei 0^0 und einem Drucke von 760 Mm. Quecksilber zukommt. Meistens aber vergleicht man ein Gas, anstatt mit Wasser, mit trockner atmosphärischer Luft von gleicher Temperatur und gleichem Druck. Wir werden in der letzteren Bedeutung den Ausdruck Dichte gebrauchen.

Die Methoden der specifischen Gewichtsbestimmung sind, vorläufig ohne Correctionen betrachtet, über welche das Nähere in **14** und **15**, die folgenden.

Für Flüssigkeiten.

1) Wägung eines in einem calibrirten Gefässe, Röhre, Pipette gemessenen Volumens. Wegen der Capillar-Erhebung wird das Volumen in einem getheilten Rohre zweckmässig nach dem vorherigen Eingiessen einer kleinen Menge durch Differenzbeobachtung gemessen, wobei man stets den Stand des horizontalen (höchsten oder tiefsten) Oberflächentheiles abliest. Das zur Vermeidung der Parallaxe nothwendige Visiren in einer und derselben Richtung wird durch ein Fernrohr erreicht, welches an einer verticalen Stange verschiebbar ist; oder einfacher, indem man stets einen und denselben fernen Punct als Augenpunct nimmt.

2) Man wägt die Flüssigkeitsmenge m und die Wasser-

menge w; welche von einem und demselben Gefäss (Tarirgläschen, Pyknometer, Stöpselglas, constantes Gefäss) aufgenommen wird. Dann ist $\Delta = \frac{m}{w}$.

3) Man wägt einen Körper (Glaskörper) in der Luft, in der Flüssigkeit und im Wasser. Ist m der Gewichtsverlust in der Flüssigkeit, w im Wasser, so ist wieder $\Delta = \frac{m}{w}$. Sehr einfach und zweckmässig ist die Wage von Mohr, mit Reitergewichten, deren Einheit das von dem Glaskörper verdrängte Wassergewicht ist.

4) Die Scalenaräometer geben an dem Theilstrich, bis zu welchem sie einsinken, entweder die Dichtigkeit oder das „Volumen", d. h. den reciproken Werth der Dichtigkeit, oder endlich auf älteren Scalen sogenannte „Dichtigkeitsgrade". Die Bedeutung dieser letzteren siehe in Tab. 3.

5) Die Höhen verschiedener Flüssigkeitssäulen, welche sich in communicirenden Röhren das Gleichgewicht halten, stehen im umgekehrten Verhältniss der Dichtigkeiten. (Hydrometer.)

Für feste Körper.

1) Wägung und Volummessung. Letztere kann bei regelmässiger Gestalt des Körpers mit dem Maafsstabe ausgeführt werden. Bei unregelmässiger Gestalt wird das Volumen gemessen, um welches ein in einer calibrirten Röhre enthaltenes Flüssigkeitsquantum bei dem Hineinwerfen des Körpers ansteigt. Besonders auf zerkleinerte Substanzen ist die Methode leicht anwendbar. Für in Wasser lösliche Substanzen dient eine andere Flüssigkeit, z. B. eine gesättigte Lösung der Substanz.

2) Ist m das Gewicht des Körpers, und verliert er, in Wasser gewogen, das Gewicht w, so ist $\Delta = \frac{m}{w}$.

Gewöhnlich hängt man dabei den Körper mit einem möglichst dünnen Faden oder Draht an einer Wagschale auf. Das Gewicht des Drahtes wird besonders bestimmt und in leicht ersichtlicher Weise in Rechnung gesetzt. Von w ist der Gewichtsverlust des Drahtes abzuziehen, den man leicht schätzen kann, indem man aus dem Verhältniss der untergetauchten zur

ganzen Länge das Gewicht des untergetauchten Stückes berechnet. Dieses dividirt durch die Dichtigkeit des Drahtes (Tab. 1) gibt die von ihm verdrängte Wassermenge.

Bei der Wägung im Wasser nehmen die Schwingungen der Wage rasch ab; man beobachtet die Einstellung, nachdem Ruhe eingetreten ist. — Der Aufhängefaden soll durch die Oberfläche des Wassers nur einmal hindurchtreten, um die Capillarkräfte, welche ohnehin die Genauigkeit der Wägung beeinträchtigen, nicht zu vermehren.

Anstatt den Körper an die Wagschale zu hängen, kann man auch ein Gefäss mit Wasser auf die Wage stellen und die Gewichtszunahme des letzteren bestimmen, wenn der mit einem Faden an einem festen Stativ aufgehängte Körper untergetaucht wird. Diese Zunahme ist gleich dem scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers im Wasser.

Mit der Nicholson'schen Senkwage wird das Gewicht in der Luft und im Wasser durch die Differenz der Gewichtstücke bestimmt, welche zum Einsinken bis zu der Marke am Hals zugelegt werden müssen. Temperaturschwankungen beeinträchtigen die Genauigkeit, um so mehr, je kleiner der Körper gegen die Senkwage ist. Die Sicherheit der Einstellung wird durch Abreiben des Halses mit Weingeist erhöht.

Auch ein spiraliger Draht (Claviersaite) mit zwei über einander angehängten Wagschalen, von denen die untere constant in ein Gefäss mit Wasser taucht, ist zur Dichtigkeitsbestimmung, besonders kleiner Körper, sehr bequem. (Jolly.) Man beobachtet, gerade wie an der Senkwage, die Gewichte, welche auf die obere Schale gelegt, eine Marke am unteren Ende des Drahtes auf eine bestimmte Stellung bringen, wenn 1) die Schalen leer sind, 2) der Körper auf der oberen, 3) wenn er auf der unteren Schale liegt. Als fester Index dient, um die Parallaxe zu vermeiden, ein Strich auf einem Stück belegten Spiegelglases.

Darf der Körper nicht in Wasser eingetaucht werden, so wägt man in einer anderen Flüssigkeit von bekannter Dichtigkeit. Mit letzterer ist dann das wie oben berechnete Resultat zu multipliciren.

Wenn der Körper specifisch leichter ist als Wasser, so wird er durch Verbindung mit einem anderen von hinreichendem Gewicht zum Untersinken gezwungen; z. B. mit einer Me-

tallklemme oder einer Glocke von Drahtnetz, unter welcher man den Körper aufsteigen lässt.

3) Das Gewicht der dem Körper an Volumen gleichen Wassermenge kann mit dem Tarirfläschchen bestimmt werden. Wiegt das letztere mit Wasser ganz gefüllt P, nachdem der Körper eingebracht und das verdrängte Wasser ausgeflossen ist P', bedeutet endlich m das Gewicht des Körpers, so ist $w = P + m - P'$. Besonders bei kleinen Körpern wird das Verfahren gebraucht, doch sind alsdann auch möglichst kleine Fläschchen anzuwenden. Ueber die Correctionen vgl. folg. Art.

In jedem Falle sind die den Körpern leicht anhaftenden Luftbläschen durch wiederholtes Eintauchen und Herausziehen oder durch Benetzen mit einem Pinsel zu entfernen.

14. Dichtigkeitsbestimmung mit dem Tarirfläschchen.

Eins der feinsten Hülfsmittel für Dichtigkeitsbestimmungen ist das Tarirfläschchen (Stöpselglas, Pyknometer, constantes Gefäss). Sobald man nur sehr kleine Mengen eines Körpers besitzt, ist es das einzig anwendbare, verlangt aber alsdann grosse Sorgfalt wegen der Ausdehnung des Wassers mit der Temperatur. Man kann auf folgende Weise aus einer einmal ausgeführten Wägung des Gefässes mit Wasser das Gewicht, welches dasselbe bei beliebiger Temperatur haben würde, berechnen.

Nennen wir für die ausgeführte Wägung die Temperatur und Dichtigkeit (Tab. 4) des Wassers t und Q, das gefundene Nettogewicht des Wassers p, und die entsprechenden Grössen für eine andere Temperatur t', Q' und p'. Letztere Grösse ist zu berechnen.

1) Soll nur die bedeutendste, von der Ausdehnung des Wassers herrührende Correction angebracht werden, so hat man $p' = p\,\frac{Q'}{Q}$.

2) Mit Rücksicht auf die Ausdehnung des Gefässes beachte man, dass das Volumen im Verhältniss $1 + 3\beta\,(t'-t)$ grösser ist, wo 3β den cubischen Ausdehnungscoefficient des Glases bezeichnet. Für gewöhnlich kann man setzen

$$3\beta = \frac{1}{40000}.$$

Es ist also

$$p' = p\,[1 + 3\beta\,(t' - t)] \cdot \frac{Q'}{Q}.$$

3) Besondere Bedeutung haben diese Vorschriften bei der Dichtigkeitsbestimmung kleiner fester Körper, da man ohne die Correctionen zu ganz falschen Resultaten gelangen kann. Man erhält das scheinbare Gewicht w des dem Körper gleichen Volumens Wasser aus folgender Formel:

$$w = m + P - P' + (P - \pi)\,[Q' - Q + 3\beta\,(t' - t)].$$

Hierin bedeutet

m das Gewicht des Körpers in der Luft,
P das Gewicht des mit Wasser gefüllten Gefässes,
P' das Gewicht des mit Wasser und dem Körper gefüllten Gefässes,
π das Gewicht des leeren Gefässes (nur angenähert zu bestimmen).

Ferner sind die Temperatur und Dichtigkeit des Wassers:
t, Q bei der Wägung mit Wasser allein
t', Q' „ „ „ „ Wasser und Körper.
3β ist der cubische Ausdehnungscoefficient des Glases.

Beweis. Oben wurde gezeigt, wenn p und p' die Nettogewichte des Wassers bei den Temperaturen t und t' bedeuten, dass $p' = p\,(1 + 3\beta\,(t' - t))\,\frac{Q'}{Q}$.

In Anbetracht dessen, dass 3β, der cubische Ausdehnungscoefficient des Glases, immer eine sehr kleine Zahl ist, und dass ferner Q' und Q nur sehr wenig von 1 verschieden sind, kann man diesen Ausdruck vereinfachen. Denn indem man für Q' schreibt $1 + (Q' - 1)$ und für Q ebenso $1 + (Q - 1)$, erhält man aus Formel 8, S. 12

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{1 + (Q' - 1)}{1 + (Q - 1)} = 1 + (Q' - Q).$$

Nach Formel 7 wird also obiger Ausdruck

$$p' = p\,[1 + 3\beta\,(t' - t) + Q' - Q] = p + p\,[3\beta\,(t' - t) + Q' - Q].$$

Um aus dem bei der Temperatur t beobachteten Gewicht P des Gläschens mit Wasser dasjenige bei t' zu berechnen, muss also zu P addirt werden das Nettogewicht des Wassers $P - \pi$ multiplicirt mit $3\beta\,(t' - t) + Q' - Q$. Das Glas mit Wasser würde also bei der Temperatur t' wiegen

$$P + (P - \pi)\,[3\beta\,(t' - t) + Q' - Q].$$

Nun hat man aber den Körper vom Gewicht m in das Gefäss gebracht,

wodurch die Wassermenge w ausgeflossen ist, und hat nunmehr das Gewicht $= P'$ gefunden. Offenbar ist also

$$P' + w = P + (P - \pi)\,[3\beta\,(t' - t) + Q' - Q] + m,$$

woraus der gesuchte Ausdruck folgt.

Zugleich ist ersichtlich, dass das Gewicht π des leeren Gefässes nur angenähert bestimmt zu sein braucht, denn dasselbe kommt nur mit einer Correctionsgrösse multiplicirt vor.

15. Dichtigkeit. Reduction der Wägung auf Wasser von 4⁰ und auf den leeren Raum.

Die in (**13**) unter Nr. 2 und 3 angeführten Methoden der Dichtigkeitsbestimmung verlangen eine Correction, welche nach folgender gemeinschaftlichen Regel ausgeführt wird.

Man muss erstens Rücksicht darauf nehmen, dass gewöhnlich das Wasser eine andere Temperatur als $+ 4^0$ und daher nicht die Dichtigkeit Eins hat. Man findet die wirkliche Dichtigkeit Q aus der Temperatur mit Hülfe der im Anhang gegebenen Tabelle 4. Zweitens sind die Wägungen auf den leeren Raum zu reduciren. Tabelle 6 giebt die Dichtigkeit λ der trockenen Luft für alle vorkommenden Temperaturen und Barometerstände. Ueber die Berechnung siehe (**18**). Meistens genügt es, den mittleren Werth $\lambda = 0{,}0012$ zu setzen, indem der hierdurch hervorgebrachte Fehler sehr selten die dritte Decimale des Resultates um eine Einheit beeinflussen wird. Die Vernachlässigung der Ausdehnung des Wassers kann das Resultat um $\frac{1}{3}$ Procent beeinflussen, die des Gewichtsverlustes in der Luft um 2 Einheiten der zweiten Decimale. Auf Gleicharmigkeit der Wage, vorausgesetzt dass man immer auf derselben Schale wägt, und auf die durch die Gewichtstücke verdrängte Luft braucht in der Regel keine Rücksicht genommen zu werden. Wir nennen

Q die Dichtigkeit des Wassers, welches zur Beobachtung gedient hat;

λ die Dichtigkeit der Luft bei der Wägung (bezogen auf Wasser);

m das scheinbare d. h. von der Wage angegebene Gewicht des in der Luft gewogenen Körpers, worunter auch bei Bestimmung einer Flüssigkeit der scheinbare Gewichtsverlust

eines in die Flüssigkeit getauchten Körpers verstanden sein kann;

w das scheinbare Gewicht des dem Volumen des Körpers gleichen Volumens Wasser von der Dichtigkeit Q.

w kann also sein:

1) bei festen Körpern: der scheinbare Gewichtsverlust des Körpers im Wasser bei einer Bestimmung nach dem Archimedischen Gesetz mit Wage oder Aräometer; oder das Gewicht des durch Einbringen des Körpers ausgeflossenen Wassers bei Anwendung des Tarirfläschchens.

2) bei Flüssigkeiten: das scheinbare Gewicht des Wassers in dem Tarirfläschchen, oder des von dem Glaskörper verdrängten Wassers.

Alsdann ist das auf Wasser von 4⁰ reducirte und von dem Einflusse der verdrängten Luft befreiete specifische Gewicht

$$\Delta = \frac{m}{w}(Q - \lambda) + \lambda.$$

$\frac{m}{w}$ ist das rohe, uncorrigirte spec. Gewicht.

Man sieht, dass der Einfluss des Gewichtsverlustes in der Luft verschwindet, sobald die Dichtigkeit gleich Eins ist. Er wird von da an desto grösser, je leichter oder je dichter der untersuchte Körper, und erreicht bei dem Platin $\left(\frac{m}{w} = 21\right)$ den Werth 0,024. Würde man ausserdem die Ausdehnung des Wassers durch die Temperatur vernachlässigen, so könnte man in diesem Falle ein um 8 Einheiten der zweiten Decimale zu grosses Resultat erhalten.

Beweis. Wenn der Körper, fest oder flüssig, in der Luft das Gewicht m hat, während er die Luftmenge l verdrängt, so wiegt er im leeren Raume $m + l$. In Betreff der Bestimmung von w können wir drei Fälle unterscheiden. Hat man das Gewicht w des gleichen Volumens Wasser durch Abwägen bestimmt, so ist das Gewicht im leeren Raume $= w + l$. Ist der scheinbare Gewichtsverlust w eines festen Körpers durch Eintauchen in Wasser gemessen, so ist derselbe ebenfalls um l zu vermehren, da das Gewicht im leeren Raume um so viel grösser gewesen wäre als in der Luft. Ebenso ist drittens, wenn die Dichtigkeit einer Flüssigkeit dadurch bestimmt wird, dass man den scheinbaren Gewichtsverlust eines und desselben Körpers in der Flüssigkeit und im Wasser sucht, jeder derselben um l zu vergrössern.

Das Wasser aber habe nicht die Temperatur $+ 4^0$, sondern eine

andere gehabt, bei welcher seine Dichtigkeit (Tab. 2.) $= Q$ ist, so würde dasselbe Volumen Wasser bei der Temperatur 4° $\frac{w+l}{Q}$ wiegen. Man erhält also in allen Fällen die wahre Dichtigkeit Δ des Körpers

$$\Delta = \frac{m+l}{w+l} Q.$$

Nun ist aber, da $\frac{w+l}{Q}$ das Volumen der verdrängten Luftmasse, wenn ihre Dichtigkeit (bezogen auf Wasser) durch λ bezeichnet wird,

$$l = \frac{w+l}{Q} . \lambda \text{ oder } l = \frac{w\lambda}{Q-\lambda},$$

und diesen Werth in obigen Ausdruck eingesetzt, erhält man

$$\Delta = \frac{m}{w}(Q-\lambda) + \lambda.$$

Beispiel: Ein Stück Silber wiege in der Luft $m = 24312$ mgr.
im Wasser von 19°2 . . . . = 21916 mgr.
so ist der scheinbare Gewichtsverlust im Wasser . $w =$ 2396 mgr.
Das uncorrigirte specifische Gewicht würde also sein

$$\frac{m}{w} = \frac{24312}{2396} = 10{,}147.$$

Das corrigirte erhalten wir, indem wir aus Tab .2 für 19°,2 $Q = 0{,}99843$ entnehmen,

$$\Delta = 10{,}147\,(0{,}99843 - 0{,}0012) + 0{,}0012 = 10{,}120.$$

Bequem für die Ausrechnung ist, falls man nicht Logarithmen anwendet, Q von 1 abzuziehen und den Unterschied δ, immer eine kleine Zahl, in die Formel einzuführen, indem man dieselbe schreibt

$$\Delta = \frac{m}{w} - (\delta + \lambda)\frac{m}{w} + \lambda.$$

In obigem Beispiel also

$$\Delta = 10{,}147 - 0{,}00277 . 10{,}1 + 0{,}0012 = 10{,}120.$$

Die Reductionen lassen sich dabei im Kopfe ausführen.

16. Dichtigkeit. Reduction auf eine Normaltemperatur.

Δ ist die auf Wasser von 4° bezogene Dichtigkeit des Körpers bei der Temperatur t, welche er bei der Wägung besass. Für einen festen Körper, dessen Gewichtsverlust im Wasser bestimmt wurde, ist natürlich die Temperatur des letzteren zu setzen. Hieraus wird die Dichtigkeit Δ_0 bei einer anderen Temperatur t_0 mit Hülfe des cubischen Ausdehnungs-

coefficienten 3β (Tab. 9) durch Multiplication mit $1 + 3\beta\,(t - t_0)$ gefunden. Man pflegt die Dichtigkeit für 0° anzugeben, hat also dann

$$\Delta_0 = \Delta\,(1 + 3\beta t).$$

Die meisten Flüssigkeiten haben eine ungleichförmige Ausdehnung, welche aus besonderen Tabellen entnommen werden muss. Findet man in diesen das Volumen derselben Flüssigkeitsmenge v_0 und v für die Temperaturen t_0 und t, so ist

$$\Delta_0 = \Delta\,\frac{v}{v_0} \text{ (Alcoholometrie).}$$

17. Dichtigkeitsbestimmung mit dem Volumenometer.

Der Zweck des Instrumentes ist die Volumenausmessung eines Körpers, welchen man nicht in eine Flüssigkeit eintauchen will, mittels Volumenbestimmung einer abgeschlossenen Luftmenge nach dem Mariotte'schen Gesetz.

Das zu bestimmende Volumen der Luftmenge sei V, wenn sie unter dem atmosphärischen Druck H Millimeter Quecksilber (Barometerstand) abgeschlossen wird. Man vergrössere ohne Luftzutritt V um die gemessene Grösse v Cub. Cm. und beobachte die dabei stattfindende Druckverminderung h Mm. Quecks., so ist $V.H = (V + v)\,(H - h)$ also

$$V = v\,\frac{H - h}{h}.$$

Wird umgekehrt V um v verkleinert und eine Druckzunahme h beobachtet, so ist

$$V = v\,\frac{H + h}{h}.$$

Nachdem so das Volumen des leeren Gefässes gemessen worden ist, bringt man den Körper in dasselbe und verfährt ebenso. Die Differenz der gefundenen Werthe ist das Volumen des Körpers, die Dichtigkeit also das Gewicht (in Grammen) dividirt durch diese Differenz.

Je kleiner v und h gegen V und H, desto grösser ist der Einfluss der Beobachtungsfehler auf das Resultat. — Man vermeide Temperaturänderungen der abgeschlossenen Luftmenge durch die Nähe des Körpers u. s. w. während des Versuches.

18. Berechnung der Dichtigkeit der Luft oder eines Gases aus Druck und Temperatur.

Ist d_0 die auf Wasser bezogene Dichtigkeit unter dem Drucke von 760 Mm. Quecksilber und für 0^0 (Tab. 1), so ist sie für den Druck b (**20**) und die Temperatur t nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetz

$$d = \frac{d_0}{1 + 0{,}003665 . t} \cdot \frac{b}{760} .$$

Die Ausdrücke $1 + 0{,}003665\, t$ und $\frac{b}{760}$ siehe in Tab. 7.

Die Dichtigkeit der trocknen atmosphärischen Luft für 0^0 und 760^{mm} Barometerstand unter 45^0 geogr. Breite (**20**) ist $\lambda_0 = 0{,}0012928$. Der Temperatur t und dem Barometerstand b entspricht also die Dichtigkeit der Luft

$$\lambda = \frac{0{,}0012928}{1 + 0{,}003665 . t} \cdot \frac{b}{760} .$$

Hiernach ist zur Bequemlichkeit Tab. 6 berechnet.

Zur genauen Bestimmung von λ gehört die Kenntniss der Luftfeuchtigkeit. Die Dichtigkeit des Wasserdampfes beträgt sehr nahe $^5/_8$ von derjenigen der Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur; kennt man also durch hygrometrische Messung die Spannkraft e (den Druck) des Wasserdampfs in der Atmosphäre (**28**), so ziehe man vom beobachteten Barometerstande $^3/_8\, e$ ab und gehe mit dem so corrigirten Werthe in Tab. 6 oder die obige Formel ein.

In Ermangelung der Kenntniss von e mag man im Mittel die Luft zur Hälfte mit Wasserdampf gesättigt annehmen. Diese Annahme ist sehr nahe gemacht, wenigstens für mittlere Temperaturen, wenn man für b den ganzen Barometerstand nimmt, aber als Factor von t die Zahl 0,004 anstatt 0,003665 einsetzt. Die Luftfeuchtigkeit kann λ um gegen $1^0/_0$ beeinflussen.

0,003665 ist nahe gleich $^{11}/_{3000}$ oder $^1/_{273}$.

19. Bestimmung einer Dampf- oder Gasdichte.

Dampfdichte nennt man die Dichtigkeit eines Dampfes (oder Gases) bezogen auf trockene atmosphärische Luft von gleicher Temperatur und gleichem Druck.

Die Dampfdichte einer bekannten chemischen Verbindung wird berechnet, indem man ihr Atomgewicht durch 28,88 dividirt. Z. B. Wasser = H_2O hat das Atomgewicht 18, also ist seine Dampfdichte $= \frac{18}{28,88} = 0,623$.

A. Dampfdichtebestimmung nach Dumas.

Ein Glasballon von $^1/_8$ bis $^1/_2$ Liter Inhalt mit einer angeschmolzenen Glasröhre, welche in eine Spitze von etwa $1\square^{mm}$ Oeffnung ausgezogen ist, wird gewogen. Alsdann lässt man einige Gramm der Flüssigkeit, von der die Dampfdichte bestimmt werden soll, in den Ballon aufsaugen, setzt diesen nebst einem Thermometer in ein Flüssigkeitsbad so, dass die Spitze herausragt und erwärmt das Bad bis zum Sieden der Flüssigkeit im Ballon. Nachdem letztere verdampft ist, erhitzt man noch mindestens 10^0 über den Siedepunct und schmelzt den Ballon mit der Stichflamme des Löthrohres zu. Die Temperatur des Bades und der Barometerstand wird in diesem Augenblick abgelesen. Dann wird der abgekühlte und gut gereinigte Ballon wieder gewogen, unter Beobachtung des Barometerstandes und der Temperatur der Luft im Wagekasten. Endlich hält man die Ballonspitze in vorher ausgekochtes oder unter der Luftpumpe luftfrei gemachtes Wasser, feilt sie an und bricht sie ab, worauf das Wasser in den Ballon steigt. Der gefüllte Ballon nebst der abgebrochenen Spitze wird wiederum gewogen. (Vgl. III.)

Wir bezeichnen durch

1) m das Gewicht des mit Luft gefüllten Ballons,
2) m' „ „ „ „ Dampf „ „
3) M „ „ „ „ Wasser „ „
4) t und b Temperatur des Dampfes und Barometerstand im Augenblicke des Zuschmelzens,
5) t' und b' Temperatur im Wagekasten und Barometerstand bei der Wägung mit Dampf. Hier ist, wenn die Spannkraft e des Wasserdampfes im Wagezimmer beobachtet ist (28), der Werth $^3/_8\, e$ von b' (aber nicht von b) abzuziehen.
6) λ' die Dichtigkeit der Luft, wie sie zu t', b' aus dem vor. Art. oder aus Tab. 6 gefunden wird.

I. Näherungsformel. Die Dampfdichte ist

$$d=\left(\frac{m'-m}{M-m}\frac{1}{\lambda'}+1\right)\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}003665.t}{1+0{,}003665.t'}.$$

Beweis. Das Gewicht des den Ballon füllenden Wassers oder sein Volumen findet sich aus den Wägungen 1 und 3 $V=M-m$. Das Gewicht D des Dampfes wird aus 1 und 2 gefunden. Die Differenz beider nämlich ist das Gewicht des Dampfes weniger das Gewicht L des gleichen Volumens Luft, also $D-L=m'-m$.

Da nun, wenn δ die Dichtigkeit des Dampfes, λ' die der Luft, beide bezogen auf Wasser, $D=\delta(M-m)$ und $L=\lambda'(M-m)$, so wird die obige Formel

$$(\delta-\lambda')(M-m)=m'-m,$$

also

$$\delta=\frac{m'-m}{M-m}+\lambda'.$$

Endlich soll die Dampfdichte d auf Luft von der Temperatur t und dem Druck b des Dampfes bei dem Zuschmelzen bezogen werden. Zu dem Zweck ist obiger Werth δ durch die Dichtigkeit λ der Luft für t,b zu dividiren. Hieraus ergibt sich

$$d=\left(\frac{m'-m}{M-m}+\lambda'\right)\cdot\frac{1}{\lambda}$$

woraus man mit Rücksicht darauf, dass $\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}003665.t}{1+0{,}003665.t'}$ ist, den obigen Ausdruck erhält.

II. Genauere Formel. Wir nehmen Rücksicht 1) auf die Ausdehnung des Glases, 2) auf die Ausdehnung des Wassers mit der Temperatur, 3) auf den Gewichtsverlust des Wassers in der Luft. (Wir vernachlässigen 1. die Aenderung des Gewichtsverlustes der Gefässwände und der Gewichtstücke durch Temperatur- und Barometerschwankungen, 2. dass der Flüssigkeitstropfen, welcher in dem Ballon bleibt, eine andere Dichtigkeit hat als das Wasser.)

Nennen wir ausser den obigen Bezeichnungen 1 bis 6

7) ϱ die Dichtigkeit des zur Wägung angewandten Wassers (Tab. 4);

8) 3β den cubischen Ausdehnungscoefficienten des Glases; im Mittel $3\beta=\frac{1}{40000}$,

so ist

$$d=\left(\frac{m'-m}{M-m}\frac{\varrho-\lambda'}{\lambda'}+1\right)\left(1-3\beta(t-t')\right)\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}003665.t}{1+0{,}003665.t'}.$$

Beweis. Aus dem scheinbaren Gewicht $M-m$ des Wassers (Volumen $= V'$) wird dasjenige im leeren Raume erhalten durch Addition des Gewichtes $V'.\lambda'$ der verdrängten Luft. Das Wasser hat die Dichtigkeit Q, also ist das Gewicht des Wassers von 4°, welches den Ballon füllt, d. h. das Volumen des Letzteren $V' = \frac{M-m+V'\lambda'}{Q}$, woraus $V' = \frac{M-m}{Q-\lambda'}$.
Wie oben finden wir also das Gewicht des Dampfes

$$D = m' - m + V'\lambda' = m' - m + \frac{M-m}{Q-\lambda'}\lambda'.$$

Dieser Dampf erfüllte bei der Temperatur des Zuschmelzens t das Hohl-Volumen V, welches der Glasballon bei dieser Temperatur hat

$$V = \frac{M-m}{Q-\lambda'}[1 + 3\beta(t-t')].$$

Demnach findet sich die Dichtigkeit δ des Dampfes, bezogen auf Wasser (Formel 4, S. 12).

$$\delta = \frac{D}{V} = \left(\frac{m'-m}{M-m}(Q-\lambda') + \lambda'\right)[1 - 3\beta(t-t')].$$

Die Dampfdichte d, bezogen auf Luft von der Dichtigkeit λ für b,t ist also

$$d = \left(\frac{m'-m}{M-m}(Q-\lambda') + \lambda'\right)[1 - 3\beta(t-t')].\frac{1}{\lambda},$$

wofür man auch, wie vorhin, den obigen Ausdruck setzen kann.

III. Es kommt häufig vor, dass die atmosphärische Luft bei dem Verdampfen der in den Ballon gebrachten flüssigen Substanz nicht vollständig ausgetrieben worden ist, was man daran erkennt, dass der Ballon sich nach Abbrechen der Spitze unter Wasser nicht ganz mit dem letzteren füllt. Will man hierauf keine Rücksicht nehmen, so fülle man ihn vor der Wägung vollständig mit der Spritzflasche und rechne nach den früheren Formeln. Der Fehler wird um so grösser, je mehr die Dampfdichte von 1 abweicht. Anderenfalls tauche man den Ballon nach dem Abbrechen der Spitze so weit ein, dass das innere und äussere Niveau gleich hoch steht, (die Luftblase unter atmosphärischem Druck abgeschlossen wird) und wäge ihn so weit gefüllt. Erst dann füllt man den Rest mit Wasser und führt die Wägung M aus. Wir setzen

9) Das Gewicht des partiell mit Wasser gefüllten Ballons $= M'$.

Dann ist die Dampfdichte

$$d_0 = \frac{(m'-m)\frac{Q}{\lambda'} + M' - m'}{(M-m)\frac{b}{b'}\frac{1+0{,}003665t'}{1+0{,}003665t}[1+3\beta(t-t')]-(M-M')}.$$

Beweis. Das Volumen der eingeschlossenen Luftblase folgt aus den Wägungen M und M' bei der Temperatur der Füllung $= \frac{M-M'}{Q-\lambda'}$; dasselbe war also bei dem Zublasen

$$v = \frac{M-M'}{Q-\lambda'}\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}003665\,t}{1+0{,}003665\,t'}.$$

Der oben berechnete Ausdruck d ist demnach die Dampfdichte eines Gemisches der Volumina v Luft und $V-v$ Dampf, und es ist, wenn wir die Dichte des reinen Dampfes durch d_0 bezeichnen, $V.d = v + (V-v)\,d_0$, woraus gefunden wird

$$d_0 = \frac{Vd-v}{V-v} = \frac{d-\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}}.$$

Nach diesem Ausdruck kann man rechnen, wenn für d der obige Werth (unter II.) eingesetzt wird, und für $\frac{v}{V}$

$$\frac{v}{V} = \frac{M-M'}{M-m}\frac{1+0{,}003665.t}{1+0{,}003665.t'}\frac{b'}{b}[1-3\beta(t-t')],$$

worin die beiden letzten Factoren meistens vernachlässigt werden können.

Nach einigen Umformungen, zum Theil mit Anwendung der Näherungsformeln S. 12 findet man hieraus leicht die obige Formel.

Beispiel: Nach den obigen Formeln soll zur Orientirung über die Grösse der bei ihrer Anwendung begangenen Fehler ein Beispiel berechnet werden, welches ungefähr mittleren Verhältnissen entspricht.

Die Beobachtungsdata seien, die Gewichte in Gr. ausgedrückt,

$m = 68{,}4522$ (Luft) $M = 293{,}91$ (ganz mit Wasser),
$m' = 68{,}7863$ (Dampf) $M' = 291{,}73$ (theilw. „ „).

Barometerstand und Temperatur sei

$b = 745{,}6$ Mm $t = 105{,}^05$ (beim Zuschmelzen),
$b' = 742{,}2$ Mm $t' = 18{,}^07$ (beim Wägen mit Dampf).

Die Spannkraft des atmosphärischen Wasserdampfes bei letzterer Operation sei $e = 9{,}4$ Mm. (**28**).

Die Temperatur des zur Wägung gebrauchten Wassers sei $= 17{,}^04$ wozu (Tab. 4.) $Q = 0{,}99877$.

Man findet (**18**) $\lambda' = 0{,}0011818$ ohne Rücksicht auf e,
$\lambda' = 0{,}0011762$ mit „ „ „.

Der richtige nach Formel III. berechnete Werth mit Rücksicht auf e ist 2,918. II ergibt 2,894, I 2,904. Ohne Rücksicht auf e erhält man entsprechend 2,925, 2,901 und 2,911.

Hieraus sieht man, dass in unserem Beispiel die dritte Decimale fehlerhaft wird durch Nichtberücksichtigung der Luftfeuchtigkeit um + 7, der im Ballon zurückgebliebenen Luft (hier 2,2 auf 225 Cub. Cm. im Ganzen) um — 24, der Ausdehnung des Wassers und des Ballons, sowie des Gewichtsverlustes des erstern in der Luft um + 10 Einheiten.

Der in den obigen Formeln häufig vorkommende Ausdruck $1 + 0{,}003665 t$ findet sich in Tab. 7. Uebrigens kann auch gesetzt werden

$$\frac{1 + 0{,}003665\, t'}{1 + 0{,}003665\, t} = \frac{272{,}8 + t'}{272{,}8 + t}.$$

B. Methode von Gay-Lussac. (Hofmann.)

Eine kleine Menge von der Flüssigkeit, deren Dampfdichte bestimmt werden soll, wird in ein dünnwandiges Glaskügelchen oder in ein ganz kleines Fläschchen mit eingeriebenem Stöpsel gefüllt und gewogen. Gläschen und Inhalt lässt man in einer mit Quecksilber gefüllten, in einer Quecksilberwanne umgestürzten Glasröhre aufsteigen, die von dem geschlossenen Ende an in Cubikcentimeter getheilt ist. Wird nun der obere Theil der Röhre erwärmt, so springt das Gläschen oder der Stöpsel durch den Dampfdruck der Flüssigkeit, und letztere verdampft über dem Quecksilber. Die Temperatur muss jedenfalls einige Grade über diejenige gesteigert werden, bei welcher die ganze Flüssigkeit verdampft ist.

Nennen wir nun

m das Gewicht der verdampften Substanz in Grammen,
v das Volumen des Dampfes in Cub. Cm.
t die Temperatur des Dampfes,
b den äusseren Barometerstand,
h die Höhe der Quecksilbersäule, über welcher der Dampf sich befindet,
e die Spannkraft des Quecksilberdampfes für die Temperatur t (Tab. 15),

so ist die gesuchte Dampfdichte, (vgl. Anf. des Art.)

$$d = \frac{m}{v} \frac{1 + 0{,}003665 . t}{0{,}001293} \frac{760}{b - h - e},$$

$$\text{oder auch } d = \frac{m}{v \lambda},$$

wobei λ zu der Temperatur t und dem Barometerstand $b - h - e$ aus Tab. 6 entnommen werden kann.

C. Gasdichte.

Um die Dichte eines permanenten Gases zu bestimmen, fülle man mit demselben einen Glasballon mit angeschmolzenem Glasrohr, (am bequemsten mit Hahnverschluss), etwa indem man den Ballon zunächst mit Quecksilber füllt, über einer Quecksilberwanne umstürzt, und nun das Quecksilber durch das aufsteigende Gas verdrängen lässt. Der Ballon wird geschlossen und gewogen (m'). Dann wird das Gas durch einen hinreichenden Luftstrom (Luft des Wagezimmers, nicht getrocknet) verdrängt und der Ballon offen gewogen (m). Endlich ergebe die Wägung des mit Wasser gefüllten Ballons das Gewicht M. Wie oben sollen b und t den Barometerstand und die Temperatur im Augenblick des Abschliessens des Gases bedeuten, wobei eventuell die Höhe der noch vorhandenen Quecksilbersäule bei b bereits in Abzug gebracht sei. t' und b' gelten für die Wägung des mit Gas gefüllten Ballons. Dann berechnet man die Gasdichte nach Formel I oder II, S. 50.

Eine etwaige bei der Füllung mit Gas zurückgebliebene Quecksilbermenge ist ohne Einfluss, wenn man sie bei allen Wägungen ungeändert lässt.

20. Bestimmung des atmosphärischen Druckes (Barometerstandes).

Auch die Barometerablesungen verlangen Correctionen von mehreren Nebeneinflüssen. Insbesondere diejenige wegen der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Temperatur beläuft sich in der Regel auf mehrere Millimeter.

1) Der Barometerstand soll in der Höhe einer Quecksilbersäule von 0^0 angegeben werden, welche dem Luftdruck durch ihre Schwere das Gleichgewicht hält. Das Quecksilber dehnt sich für 1 Grad um 0,000181 seines Volumens aus. Ist demnach l der bei der Temperatur t im Barometer abgelesene Barometerstand, so ist der auf 0^0 reducirte (4, Nr. 2)

$$b = l - 0{,}000181 . l . t.$$

Häufig genügt es, für l in dem Correctionsgliede einen mittleren Werth anzunehmen und die Correction durch Subtraction von $0{,}135 . t$ Mm. anzubringen.

2) Wegen der **Ausdehnung des Maafsstabs** muss bei genauen Messungen auch dessen Länge auf seine Normaltemperatur t_0 reducirt werden, was durch Addition von $\beta(t-t_0)l$ erreicht wird, worin β den Ausdehnungscoefficienten des Maafsstabes (0,000019 für Messing, 0,000008 für Glas) bedeutet. Wenn wie gewöhnlich die Normaltemperatur $= 0^0$, so wird der wegen der Temperaturausdehnung vollständig corrigirte Barometerstand

$$b = l - (0{,}000181 - \beta).lt.$$

Die Correction beträgt also

für eine Messingscale $- 0{,}000162.lt$
für eine Glasscale $- 0{,}000173.lt$.

3) Um die **Capillardepression eines Gefässbarometers** zu corrigiren, fügt man zum beobachteten Stande den aus Tabelle 16 zu dem inneren Halbmesser r der Röhre entnommenen Werth δ hinzu.

Die Vergleichung mit einem Normalbarometer enthält natürlich diese Correction in ihrem Resultat.

4) In höheren Temperaturen bewirkt die **Spannkraft der Quecksilberdämpfe** eine kleine Depression, welche hinreichend genau corrigirt wird (Tab. 15), indem man zu dem beobachteten Stande $0{,}002.t$ Mm. addirt.

5) Durch die vorigen Correctionen wird der richtige Barometerstand gewonnen. Für manche Zwecke aber wird die Kenntniss des **Luftdruckes** verlangt, und für diese muss berücksichtigt werden, dass der Luftdruck nur unter der Voraussetzung **constanter Schwere** dem Barometerstande proportional ist. Als Norm pflegt man die Schwere g_0 am **Meeresspiegel unter 45° geogr. Breite** zu nehmen. Bezeichnen wir durch g die Schwere unter der Breite φ und in der Höhe H Meter über dem Meeresspiegel, so ist

$$\frac{g}{g_0} = 1 - 0{,}0026.\cos 2\varphi - 0{,}0000002.H.$$

Mit diesem Ausdruck, dessen letztes Glied übrigens nur in sehr bedeutenden Höhen merklich wird, ist also der beobachtete Barometerstand zu multipliciren, um denjenigen zu erhalten, welcher derselben Expansivkraft der Luft unter 45° am Meeresspiegel entspricht.

21. Barometrische Höhenmessung. (Hypsometrie.)

Wenn an zwei Stationen gleichzeitig der Barometerstand beobachtet worden ist, oder auch wenn die mittleren Barometerstände an ihnen bekannt sind, so ergibt sich die Höhendifferenz der Stationen nach folgenden Regeln. Es sollen bedeuten

b_0 und b_1 die beiden Barometerstände, auf 0^0 reducirt und, wenn nöthig, wegen Capillardepression und Dampfdruck des Quecksilbers corrigirt (vor. Art.),

t_0 und t_1 die Lufttemperaturen an beiden Orten,

h die gesuchte Höhendifferenz in Metern.

Zur Abkürzung nennen wir ferner

t die mittlere Lufttemperatur zwischen beiden Stationen, also $t = \frac{1}{2}(t_0 + t_1)$.

I. Für gewöhnlich rechnet man dann

$$h = 18420^{\text{met}}.\,(\log b_0 - \log b_1)\,(1 + 0{,}0039\,.\,t),$$

wofür bis zu Höhendifferenzen von etwa 1000^{met} auch der bequemere angenäherte Ausdruck gesetzt werden kann

$$h = 16000^{\text{met}}.\,\frac{b_0 - b_1}{b_0 + b_1}\,(1 + 0{,}0039\,t).$$

II. Soll die Aenderung der Schwere an der Erdoberfläche in Rechnung gezogen werden, so setze man ferner

φ gleich der geographischen Breite,

H gleich der mittleren Höhe der beiden Orte über dem Meeresspiegel, in Metern. Hier genügt eine rohe Annäherung bis auf 500^{met} vollständig.

Dann ist

$$h = 18420^{\text{met}}.(\log b_0 - \log b_1)\,(1 + 0{,}0039\,t)$$
$$.(1 + 0{,}0026\,.\cos 2\varphi + 0{,}0000002\,H).$$

III. In obigen Formeln wird ein mittlerer Feuchtigkeitszustand der Luft vorausgesetzt. Ist aber mit dem Barometer gleichzeitig an beiden Stationen das Hygrometer oder Psychrometer (28) beobachtet worden, so nennen wir

e_0 und e_1 die Spannkräfte des Wasserdampfes an den beiden Stationen,

setzen ferner zur Abkürzung

$$k = \tfrac{1}{2}\left(\frac{e_0}{b_0} + \frac{e_1}{b_1}\right)$$

und berechnen die Höhendifferenz nach der Formel

$$h = 18405^{\text{met.}}(\log b_0 - \log b_1)(1 + 0{,}003665 . t)$$
$$.(1 + 0{,}0026 . \cos 2\varphi + 0{,}0000002 H + \tfrac{3}{8} k).$$

Unter den Logarithmen in obigen Formeln sind die gewöhnlichen Briggischen verstanden.

Des bequemeren Transportes der Instrumente wegen wird bei Höhenmessungen häufig der Barometerstand aus der Siedetemperatur des Wassers abgeleitet. Die 10. und 11. Tabelle geben die zusammengehörigen Siedetemperaturen und Barometerstände. Da 1 Mm. Barometerstand etwa $^1/_{25}$ Grad entspricht, so folgt, dass sehr empfindliche, genau justirte Thermometer sowie die grössten Vorsichtsmaafsregeln der Temperaturbestimmung (22) angewandt werden müssen, um eine mässige Genauigkeit zu erzielen.

Beweis der hypsometrischen Formel. Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft ist (**18** und **20**) unter der geogr. Breite φ, in der Höhe H, bei dem Barometerstande b, der Temperatur t und der Spannkraft e des Wasserdampfs, wenn wir zur Abkürzung 0,0026. cos $2\varphi = \delta$, $0{,}0000002 = \varepsilon$ und $0{,}003665 = \alpha$ setzen, gleich

$$\frac{0{,}0012928}{1+\alpha t}\,\frac{b - {}^3/_8 e}{760}\,(1 - \delta - \varepsilon H).$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers von 0° aber beträgt 13,596. Folglich ist, wenn bei einem Ansteigen um die Höhe dH der Barometerstand b um db abnimmt (d. h. dH die Höhe einer Luftsäule und db die Höhe einer Quecksilbersäule bedeutet, die sich im Gleichgewicht halten),

$$-\mathrm{d}b = \frac{0{,}0012928}{13{,}596 . 760}(b - {}^3/_8 e)\frac{1 - \delta - \varepsilon H}{1 + \alpha t}\,\mathrm{d}H.$$

Hierin sind ausser b eigentlich e und t mit H veränderlich, aber nach einem unbekannten Gesetze. Desswegen führen wir für t den constanten Mittelwerth ein und setzen e in ein constantes Verhältniss zum Barometerstand, $e = kb$. Rechnen wir sodann den Zahlenfactor aus und behandeln die kleinen Grössen $^3/_8 k$, δ und εH nach S. 12 als Correctionsgrössen, so können wir schreiben

$$-7993000\,(1 + \alpha t)\,(1 + \delta + {}^3/_8 k)\,\frac{\mathrm{d}b}{b} = (1 - \varepsilon H)\,\mathrm{d}H.$$

Wird jetzt integrirt, auf der linken Seite von b_0 bis b_1, auf der rechten von H_0 bis H_1, so kommt

$$7993000(1 + \alpha t)(1 + \delta + {}^3/_8 k)(\operatorname{lognat} b_0 - \operatorname{lognat} b_1) = (H_1 - H_0)(1 - \varepsilon \frac{H_1 + H_0}{2}).$$

Endlich setzen wir log nat $b = 2{,}3026.$ log brigg b, behandeln $\varepsilon \frac{H_1 + H_0}{2} = \varepsilon H$ als Correctionsglied und erhalten

$$H_1 - H_0 = h = 18405000^{\text{mm}} (\log b_0 - \log b_1)(1 + \alpha t)(1 + \delta + \varepsilon H + {}^3/_8 k).$$

Die Näherungsformeln für unbekannte Luftfeuchtigkeit ergeben sich, wenn man die halbe Sättigung annimmt und den Einfluss des Wasserdampfs in die Dichtigkeit und den Ausdehnungscoefficienten der Luft aufnimmt.

22. Eispunct und Siedepunct eines Thermometers.

An den käuflichen Thermometern sind die beiden festen Puncte oft sehr fehlerhaft angegeben. Um den Eispunct zu prüfen, taucht man das Thermometer in schmelzenden Schnee oder reines zerstossenes Eis. Dem Punct, auf welchen sich die Quecksilbersäule einstellt, entspricht die Temperatur Null.

Die Quecksilbersäule soll fast ganz in das Eis eintauchen. — Dem durch Schmelzen gebildeten Wasser muss unten im Gefäss ein Abzug gelassen werden. — Gefässe mit schlecht leitenden Wänden, z. B. solche von Holz sind vorzuziehen. — Je wärmer die umgebende Luft ist, desto sorgfältiger müssen diese Vorsichtsmassregeln beobachtet werden.

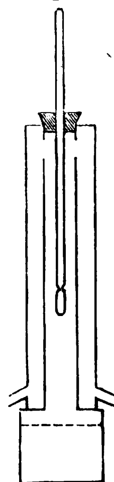
Zur Bestimmung des Siedepunctes, d. h. desjenigen Theilstriches, welchem die Temperatur 100° entspricht, bringt man das Thermometer in die Dämpfe von Wasser, welches in einem Metallgefäss oder auch einem Glasgefäss mit hineingeworfenen Metallstücken kräftig siedet. Die Temperatur des Wasserdampfes ergibt sich aus dem Druck, unter welchem das Wasser siedet, d. h. aus dem auf 0° reducirten Barometerstande (20) mit Hülfe von Tab. 10. Bis auf $\frac{1}{100}$ Grad richtig kann man zwischen 715 und 770mm für jeden Barometerstand b die Siedetemperatur t des Wassers auch ohne Tabelle berechnen nach der Formel

$$t = 100^0 + 0^0{,}0375.(b - 760).$$

Die Thermometerkugel wird nicht in das siedende Wasser gebracht, sondern etwa 1 Cm. über die Oberfläche. Uebrigens soll auch hier möglichst die ganze Quecksilbersäule im Dampf befindlich sein. — Der Ausgang für die Dämpfe muss so weit sein, dass nicht im Innern des Gefässes ein Ueberdruck entsteht. — Die Flamme wird von den Theilen der Gefässwände,

welche nicht mit Wasser in Berührung sind, in einiger Entfernung gehalten. — Zweckmässig ist ein Gefäss von beistehender Gestalt, in welchem der Dampf nach dem Umspülen des Thermometers oben in eine äussere Hülle und aus dieser unten in die Luft austritt. In einem solchen Gefäss darf die Quecksilberkugel von der Oberfläche des Wassers weiter entfernt sein, als oben angegeben.

Fig. 1.



Sowohl bei der Eispunct- als bei der Siedepunctbestimmung muss mit der Ablesung gewartet werden, bis man überzeugt ist, dass das Quecksilber einen unveränderlichen Stand zeigt. — Zu feineren Bestimmungen wird die Ablesung mit Fernrohr angewendet: man richtet das Thermometer durch Visiren nach einem Fensterrahmen u. dgl. vertical und stellt das Fernrohr in der Höhe des abzulesenden Theilstriches auf.

Beispiel. Der reducirte Barometerstand betrug 742^{mm}. Das Quecksilber des Thermometers stand im Wasserdampf auf 98,8. Die Siedetemperatur findet sich aus Tab. 10 gleich $99{,}^{0}33$ (aus obiger Formel $100 - 0{,}0375 . 18 = 99{,}^{0}325$). Folglich ist die Temperatur 100^{0} bei dem Theilstrich $98{,}8 + 0{,}67 = 99{,}47$.

23. Calibrirung eines Thermometers.

Aus dem ungleichmässigen Querschnitt der Röhre entspringen bei den gewöhnlichen Thermometern Fehler, die in hohen Temperaturen sich zuweilen auf mehr als 10 Grad belaufen. Wir wollen zu einem Thermometer, bei welchem nur eine richtige Längentheilung und ungefähre Uebereinstimmung der Scala mit der richtigen Temperatur vorausgesetzt wird, eine Correctionstabelle verfertigen, durch welche die Ablesungen auf den Stand eines Normalthermometers reducirt werden, d. h. eines Thermometers, dessen Theilstriche Null und Hundert mit dem Eispunct und Siedepunct (vor. Art.) zusammenfallen, und dessen Scalentheile alle ein gleiches Volumen haben.

Ausser den Bestimmungen des vorigen Artikels müssen wir also die Calibrirung der Thermometerröhre vornehmen, das heisst die Volumina vergleichen, welche an verschiedenen

Stellen dem Scalentheile entsprechen. Zu diesem Zwecke dient ein von der übrigen Masse abgetrennter Quecksilberfaden.

Ablösen eines Quecksilberfadens von beliebiger Länge. Man neigt den oberen Theil des Thermometers nach unten und führt einen leichten Stoss gegen das Ende aus. Dann löst sich entweder schon ein Faden ab oder es fliesst die ganze Quecksilbermasse, indem sie sich an einem Puncte der Kugel von der Wandung löst. Die Veranlassung des Abreissens wird meistens durch ein irgendwo dem Glase anhaftendes mikroskopisches Luftbläschen gebildet, welches sich zu einer grösseren Blase ausdehnt. Trennt das Quecksilber sich in der Kugel vom Glase, so sucht man durch rasches Aufrichten des Thermometers die dort gebildete Blase in den Eingang der Röhre aufsteigen zu lassen, was mit einiger Geduld immer gelingt. Dann reisst das Quecksilber im Eingang der Röhre.

Der Faden wird vorläufig zu lang sein, etwa um p Grade länger, als gewünscht wird. Man erwärmt nun, während der Faden abgetrennt ist, die Kugel; die Luft wird vor dem ansteigenden Quecksilberniveau fortgeschoben. Darauf lässt man den Faden rasch zu dem übrigen Quecksilber zurückfliessen und beobachtet den Stand des oberen Endes des Fadens im Augenblick des Zusammenstosses. Das Luftbläschen bleibt, wenn die beiden Quecksilbermassen in Berührung getreten sind, an dem Puncte der Glasröhre haften, wo der Zusammenstoss erfolgte. Lässt man also um p Grade abkühlen und wiederholt die Neigung und Erschütterung, so reisst jetzt ein Faden von der verlangten Länge ab.

Ist umgekehrt ein Faden um p zu kurz, so vereinigt man ihn mit der übrigen Masse, erwärmt nach der Vereinigung um p, dann reisst die gewünschte Länge ab.

Wenn auch vielleicht nicht auf das erste Mal, so gelingt es nach einigen Wiederholungen dieser Manipulationen immer, bis auf Bruchtheile eines Grades genau Fäden von willkürlicher Länge zu erhalten. Nur für sehr kurze Fäden versagt das Verfahren oft, so dass man sich dann, wie unten gezeigt wird, durch combinirte Beobachtungen verschiedener Längen helfen muss.

Einstellung und Ablesung des Fadens. Durch gelindes Neigen und Erschüttern lässt sich das eine Ende des Fadens mit grosser Genauigkeit auf einen beliebigen Theil-

strich einstellen. Für feinere Beobachtungen, insbesondere mit dem Fernrohr, begnügt man sich mit genäherter Einstellung und schätzt die Zehntel Grade an beiden Enden des Fadens.

Da der Quecksilberfaden und die Theilung nicht in einer Ebene liegen, so muss man bei den Ablesungen die Parallaxe vermeiden. Am einfachsten legt man desswegen das Thermometer auf eine Spiegelplatte und hält das Auge so, dass sein Bild mit dem abgelesenen Theilstrich zusammenfällt. Oder man stellt eine Lupe fest auf und verschiebt das Thermometer parallel mit sich selbst bis unter dieselbe. Die grösste Genauigkeit gewährt die Ablesung mit dem Fernrohr.

Beobachtung und Berechnung. Die Calibrirung kann man in mannichfaltiger Weise ausführen. In jedem Falle ist es gerathen, vor der Beobachtung den Plan der Reduction genau festzustellen, weil man hinterher auf verwickelte Rechnungen geführt werden könnte. Immer wird die Berechnung dadurch erleichtert, dass Eis- und Siedepunct als Endpuncte verglichener Volumina vorkommen. Beobachtungen nach dem folgenden Schema werden meistens genügen, im Gegensatz zu den feineren, aber zeitraubenden und grosse Rechnungen erfordernden Methoden (vgl. Bessel, Pogg. Ann. Bd. 6, S. 287); um so mehr, da vollständig rectificirte Quecksilberthermometer je nach der Glassorte nicht unerheblich differiren können. (Vgl. **24**, Schluss.)

Es sei a das Intervall, in welchem wir calibriren wollen, und zwar sei a in 100 theilbar, also $a = \frac{100}{n}$, wo n eine ganze Zahl ist. Wir lösen einen Faden von nahezu dieser Länge a ab. Diesen legen wir successive auf die Strecken der Theilung von nahe 0 bis a, a bis $2a$ u. s. w. In den einzelnen Lagen nehme der Faden die Anzahl Theilstriche ein

$a + \delta_1$ auf der Strecke 0 bis a,
$a + \delta_2$ „ „ „ a bis $2a$,
. . . .
$a + \delta_n$ „ „ „ $(n-1)\,a$ bis 100.
. . . .

Ferner sei (vor. Art.) bestimmt worden,
dass die Temperatur 0^0 dem Th.-Str. p_0
„ „ „ 100 „ „ $100 + p_1$ entspricht.

Die Grössen $\delta_1\ \delta_2 \cdots$ sowie p_0 und p_1 sind also kleine

Zahlen, in Scalentheilen und deren Bruchtheilen ausgedrückt, die positiv oder negativ sein können.

Setzen wir dann zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{p_0 - p_1 + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n}{n},$$

so ist die Correctionstabelle des Thermometers

Theilstrich	Correction
0	$-p_0$
a	$\alpha - p_0 - \delta_1$
$2a$	$2\alpha - p_0 - \delta_1 - \delta_2$
.	. . . . . .
ma	$m\alpha - p_0 - \delta_1 - \delta_2 \cdots - \delta_m$
.	. . . .

Oder auch: für den Theilstrich ma ist die Correction $\varDelta_m$, wenn $\varDelta_{m-1}$ diejenige für den Theilstrich $(m-1)a$ ist,

$$\varDelta_m = \varDelta_{m-1} + \alpha - \delta_m.$$

Die unter der Rubrik „Correction" enthaltenen Werthe sind also diejenigen Zahlen, welche man der nebenstehenden Ablesung hinzufügen, resp. wenn negativ von ihr abziehen muss, um den derselben Temperatur entsprechenden Stand eines richtigen Quecksilberthermometers zu erhalten.

Für die zwischenliegenden Grade interpolirt man eine Tabelle auf gewöhnlichem Wege.

Beweis. Der zur Beobachtung benutzte Quecksilberfaden, n mal an einandergelegt, nimmt das Volumen der Röhre von Theilstrich 0 bis 100, vermehrt um $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$ ein. Da aber 0^0 bei Th.-Str. p_0, 100^0 bei Th.-Str. $100 + p_1$ ist, also der Vermehrung des Quecksilbervolumens von Th.-Str. 0 bis 100 eine Temperaturzunahme von $100 + p_0 - p_1$ Graden entspricht, so bedeutet die Vermehrung um das Volumen des Fadens die Temperaturzunahme $\frac{100 + p^0 - p_1 + \delta_1 + \delta_2 \cdots + \delta_n}{n} = a + \alpha$ (s. oben.)

Also entspricht einem Steigen des Quecksilbers

von Th.-Str. 0 bis a die Temp.-Zunahme $a + \alpha - \delta_1$

„ „ a „ $2a$ „ „ „ $a + \alpha - \delta_2$

. . . .

und endlich

vom Th.-Str. 0	die Temp.-Zunahme	
bis a	$a +$	$\alpha - \delta_1$
bis $2a$	$2a +$	$2\alpha - \delta_1 - \delta_2$
. .	. .	. . . .
bis ma	$ma +$	$m\alpha - \delta_1 - \delta_2 \cdots - \delta_m$

Die Ausdrücke hinter dem Strich würden die Thermometercorrectionen sein, wenn dem Th.-Str. 0 auch die Temperatur 0 entspräche. Da ihm die Temperatur $-p_0$ entspricht, so ist von jedem noch p_0 abzuziehen.

Beispiel. Ein bis zum Siedepunct des Quecksilbers getheiltes Thermometer soll, was für gewöhnliche Zwecke genügen wird, von 50 zu 50 Grad calibrirt werden. Es ist also hier $n = \frac{100}{50} = 2$. Ein Faden von nahe 50° Länge wurde abgelöst und nahm die Strecken ein

von Thstr.	0,0	bis	50,9	$\delta_1 = +0,9$
	50,0	„	100,4	$\delta_2 = +0,4$
	100,1	„	150,3	$\delta_3 = +0,2$
	149,8	„	199,8	$\delta_4 = \pm 0,0$
	200,4	„	250,0	$\delta_5 = -0,4$ u. s. w.

Ausserdem war die Temperatur 0° auf Th.-Str. + 0,6 und die Temperatur 100° auf Th.-Str. 99,7 gefunden; also $p_0 = +0,6$, $p_1 = -0,3$.

Hiernach ist

$$\alpha = \frac{p_0 - p_1 + \delta_1 + \delta_2}{n} = \frac{+0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4}{2} = +1,1.$$

Die Correctionstabelle ist also

Theilstrich.	Correction.	
0	$-0,6$	$= -0,6$
50	$1,1 - 0,6 - 0,9$	$= -0,4$
100	$2,2 - 0,6 - 0,9 - 0,4$	$= +0,3$
150	$3,3 - 0,6 - 0,9 - 0,4 - 0,2$	$= +1,2$
200	$+1,2 + 1,1 - 0,0$	$= +2,3$
250	$+2,3 + 1,1 + 0,4$	$= +3,8$ u. s. w.

Die Uebereinstimmung der für 100 berechneten Correction mit der Siedepunctbestimmung liefert eine theilweise Probe der Richtigkeit der Rechnung.

Aus der letzten Spalte interpolirt man nach gewöhnlichen Regeln die Correction für einen zwischenliegenden Theilstrich. Z. B. würde der Ablesung 167,3 die Temperatur 167,3 + 1,6 = 168,°9 entsprechen.

Calibrirung durch mehrere abgelöste Fäden. Nicht immer gelingt die Abtrennung eines so kurzen Fadens wie das Intervall a, in welchem calibrirt werden soll. Dann muss man sich mit mehreren Fäden, deren Längen verschiedene Vielfache von a sind, zu helfen suchen. Durch einen Faden von der ungefähren Länge ka kann man die Scalenräume 0 bis a und ka bis $(k+1)a$ und so fort mit einander vergleichen, indem man den Faden zuerst zwischen 0 und ka und dann zwischen a und $(k+1)a$ bringt; denn das Volumen, welches bei der Verschiebung auf der einen Seite frei wird, ist demjenigen gleich, welches auf der anderen Seite neu eingenommen wird. Der in beiden Lagen gemeinsam ein-

genommene Raum hebt sich weg. Zum Beispiel kann ein Faden von beiläufig 40^0 Länge dazu dienen, um 0 bis 20 mit 40 bis 60 zu vergleichen.

Um aber alle Theile auf ein gemeinsames Maass zurückzuführen, müssen offenbar Beobachtungen mit mehreren Fäden angestellt werden. Zwei Fäden von der Länge $2a$ resp. $3a$ sind immer genügend, denn mit dem ersteren kann man etwa 0 bis a, $2a$ bis $3a$, $4a$ bis $5a$ u. s. w. auf ein gemeinsames Maass zurückführen, und dann auf dasselbe Maass die noch nicht verglichenen Theile durch den Faden $3a$, indem z. B. a bis $2a$ auf $4a$ bis $5a$ reducirt wird u. s. f.

Ein allgemeines Schema lässt sich hier kaum geben; nur einige Regeln, welche behufs der Bequemlichkeit und Genauigkeit zu beobachten sind. So führen überzählige Vergleichungen bei der Reduction meistens auf umständliche Ausgleichungsrechnungen, welche sich oft nur mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate systematisch durchführen lassen. Man vermeide sie also und wiederhole lieber dasselbe Schema, welches nur nothwendige Vergleichungen enthält, durch mehrere Beobachtungsreihen. Ferner ist es für Genauigkeit und Bequemlichkeit unzuträglich, wenn einzelne Vergleichungen mit demselben Maass viele Zwischenglieder enthalten. Besser ist es also, diese durch Zuhülfenahme eines ferneren Fadens zu verringern. Es muss also der Reductionsplan im einzelnen Falle vor den Beobachtungen genau überlegt werden.

Um nun das auf S. 61 aufgestellte Schema für die Berechnung der Correctionstabelle benutzen zu können, ist es am einfachsten, aus den Ablesungen immer diejenige Strecke abzuleiten, welche ein und derselbe Faden von der Länge a an den verschiedenen Stellen einnehmen würde. Man nimmt bei den Beobachtungen hierauf Rücksicht, indem alle zu vergleichenden Volumina auf möglichst kurzem Wege auf ein und dasselbe Intervall, z. B. das mittelste von allen, zurückgeführt werden. Ein Beispiel wird diess hinlänglich klar machen.

Beispiel. Ein Thermometer soll zwischen 0 und 100 von 20 zu 20 Grad calibrirt werden, mittels zweier Fäden von 40^0 resp. 60^0 Länge. Wir nehmen die mittelste Strecke von Th.-Str. 40 bis 60 als dasjenige Volumen, mit dem wir die übrigen vier Strecken vergleichen wollen. Wir reduciren also die Beobachtungen auf diejenigen Zahlen, welche uns ein Quecksilberfaden F geliefert haben würde, der das Volumen von

Th.-Str. 40 bis 60 gerade ausfüllt. Nach der obigen Bezeichnung (S. 61) ist also

$$\delta_3 = 0.$$

Nun nehme der Faden von nahe 40° in zwei Lagen die Strecken ein

Th.-Str. + 0,3 bis 40,0 und 20,7 bis 60,0.

Der Faden F würde also gereicht haben

von Th.-Str. + 0,3 bis 20,7; also $\delta_1 = + 0,4$.

Geradeso führen wir durch Beobachtungen zwischen 40 und 80, sowie 60 und 100 die Strecke 80 bis 100 auf F zurück. Es sei gefunden

$$\delta_5 = - 0,7.$$

Jetzt nehmen wir eine Säule von 60° Länge, legen sie zwischen 0 und 60, sowie 20 und 80. Dadurch wird 60 bis 80 auf 0 bis 20 reducirt, und da letztere Strecke bereits mit 40 bis 60 verglichen worden ist, auch auf den Faden F. Die eingenommenen Strecken seien

Th.-St. 0,0 bis 60,2 und 20,0 bis 79,6;

so ist 0 bis 20 = 60,2 bis 79,6.

Der Faden F aber ist um 0,4 länger als 0 bis 20, würde also von 60,2 bis 80,0 gereicht haben; also

$$\delta_4 = - 0,2.$$

Endlich sei ebenso durch Beobachtungen zwischen 20 bis 80 und 40 bis 100 gefunden

$$\delta_2 = + 0,3.$$

Es wurde ferner bestimmt

die Temp. 0° und 100° bei Th.-Str. + 0,1 und 100,8,

also $p_0 = + 0,1$, $p_1 = + 0,8$.

Die Anzahl der zwischen 0 und 100 verglichenen Strecken ist $n = 5$. Hieraus berechnen wir (S. 62).

$$\alpha = \frac{+0,1 - 0,8 + 0,4 + 0,3 + 0,0 - 0,2 - 0,7}{5} = -0,18.$$

Und die Correctionstabelle wird unter Benutzung der Formel $\Delta_m = \Delta_{m-1} + \alpha - \delta_m$ erhalten

Theilstrich.	Correction.
0	− 0,10
20	− 0,10 − 0,18 − 0,4 = − 0,68
40	− 0,68 − 0,18 − 0,3 = − 1,16
60	− 1,16 − 0,18 + 0,0 = − 1,34
80	− 1,34 − 0,18 + 0,2 = − 1,32
100	− 1,32 − 0,18 + 0,7 = − 0,80.

Die letzte Zahl ist eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Vergleichung zweier Thermometer. Eine Correctionstabelle für ein Thermometer lässt sich auch dadurch entwerfen, dass man es bei verschiedenen Temperaturen mit einem

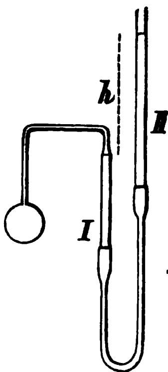
Normalthermometer vergleicht. Beide Instrumente werden dabei in ein nicht zu kleines Gefäss mit Flüssigkeit gebracht, welches gegen Wärmeabgabe und gegen Strahlung der Thermometer möglichst geschützt wird. Zweckmässig ist eine Umkleidung der Gefässwände mit Filz. Die Thermometerkugeln sollen inmitten der Flüssigkeit dicht neben einander stehen, und vor jeder Ablesung wird letztere durch Rühren in Bewegung gesetzt. In hohen Temperaturen wird bei alledem die Vergleichung leicht ungenau. Siehe darüber noch 27, A.

Die nach Regnault's Methode von Fastré angefertigten Normalthermometer sind vor der Theilung calibrirt und so getheilt, dass jedem Scalentheil dasselbe Volumen entspricht. Uebrigens ist die Theilung willkürlich. Wenn die Temperatur 0° bei dem Theilstrich p_0, die Temperatur 100° bei p_1 liegt, so bedeutet die Ablesung p die Temperatur $\frac{100}{p_1 - p_0}(p - p_0)$.

24. Luftthermometer.

Die wissenschaftliche Definition der Temperatur beruht auf der Annahme, dass ein vollkommenes Gas (z. B. die trockne Luft) sich bei constantem Druck der Temperaturerhöhung proportional ausdehne. Die Grösse der Ausdehnung beträgt für jeden Grad 0,003665 des Volumens bei 0°. Identisch mit dieser Definition ist der Satz, der Druck einer Luftmasse von constantem Volumen nimmt für jeden Grad Temperaturerhöhung um 0,003665 ihres Druckes bei 0° zu.

Fig. 2.



Das einfachste Luftthermometer (sehr zweckmässige Gestalt von Jolly) beruht auf letzterem Satze. Ein mit trockener Luft gefüllter Glasballon von etwa 50 C. C. Inhalt steht durch ein Capillarrohr mit einer verticalen Glasröhre *I* in Verbindung, in welcher die Luft über Quecksilber abgegrenzt wird. Durch die Erhöhung oder Vertiefung des Quecksilberniveau in einem mit *I* durch einen Gummischlauch communicirenden Rohre *II* kann man die Oberfläche in *I* bis zu einer nahe an der Mündung des Capillarrohres befindlichen Marke „einstellen“.

Um das Instrument zu graduiren, umgibt

man die Kugel mit schmelzendem Eise (vgl. 22), stellt das Quecksilber ein und beobachtet den Barometerstand b_0 und die Höhe h_0 des Niveau in *II* über demjenigen in *I*. Setzen wir $b_0 + h_0 = H_0$, wo h_0 negativ ist, wenn das Niveau in *II* das tiefere ist. Alle b und h seien nach **20** auf 0° reducirt.

Wird nun der Luft in der Kugel eine andere zu messende Temperatur t mitgetheilt, alsdann das Quecksilber „eingestellt" und der Barometerstand b sowie die Quecksilberhöhe h beobachtet, und setzen wir $b + h = H$, so ist

$$t = \frac{H - H_0}{0{,}003665 . H_0 - 3\beta . H} .$$

3β bedeutet den cubischen Ausdehnungscoefficienten des Glases. Ist dieser für die betreffende Glassorte nicht bekannt, so mag man $3\beta = 0{,}000025$ setzen. Bis zu Temperaturen von etwa 60° kann dann hinreichend genau nach der bequemeren Formel gerechnet werden

$$t = 275 . \frac{H - H_0}{H_0} .$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass das Volumen der Capillarröhre bis zu der Marke, auf welche das Quecksilber eingestellt wird, gegen das Volumen des Ballons ganz vernachlässigt werden kann.

Andernfalls ist als Correction zu obigem t hinzuzufügen

$$t . \frac{v'}{v} \frac{H}{H_0} \frac{1}{1 + 0{,}003665 . t'} ,$$

worin v das Volumen des Ballons, v' dasjenige des Verbindungsstückes bis zur Marke, t' die Zimmertemperatur bedeutet.

Das Verhältniss $\frac{v'}{v}$ wird durch Wägen mit Quecksilber gefunden. Wenn p das Gewicht des Quecksilbers im Ballon allein, P dagegen bei der Füllung bis zur Marke, so ist

$$\frac{v'}{v} = \frac{P - p}{p} .$$

Beweis. Die Luftmenge bleibt dieselbe. Ist v das Volumen des Ballons bei 0°, d_0 die Dichtigkeit der Luft für 0° und 760mm, so ist die Luftmenge, wenn wir $0{,}003665 = \alpha$ setzen, gegeben

bei der ersten Beobachtung durch $\frac{d_0 H_0}{760}\left(v + \frac{v'}{1 + \alpha t'}\right)$,

bei der zweiten Beobachtung durch $\frac{d_0 H}{760}\left(\frac{v(1 + 3\beta t)}{1 + \alpha t} + \frac{v'}{1 + \alpha t'}\right)$.

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke, Weglassung von $\frac{d_0}{760}$, und indem wir beide Seiten mit $\frac{1+\alpha t}{v}$ multipliciren, kommt

$$H_0(1+\alpha t)\left(1+\frac{v'}{v}\frac{1}{1+\alpha t'}\right)=H\left(1+3\beta t+\frac{v'}{v}\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}\right),$$

oder durch Absonderung von t

$$t\left[\alpha H_0-3\beta H-\frac{v'}{v}\frac{\alpha}{1+\alpha t'}(H-H_0)\right]=(H-H_0)\left(1+\frac{v'}{v}\frac{1}{1+\alpha t'}\right).$$

Hieraus ergibt sich sofort der erste der obigen Ausdrücke, sobald man $\frac{v'}{v}$ gleich Null setzt. Um die Correction zu erhalten, schreiben wir die linke Seite $t(\alpha H_0-3\beta H)\left(1-\frac{v'}{v}\frac{\alpha}{1+\alpha t'}\frac{H-H_0}{\alpha H_0-3\beta H}\right)$. In dem Factor der kleinen Grösse $\frac{v'}{v}$ können wir das im Nenner vorkommende $3\beta H$ gegen αH_0 vernachlässigen und bekommen endlich (Formel 7, S. 12)

$$t=\frac{H-H_0}{\alpha H_0-3\beta H}\left(1+\frac{v'}{v}\frac{H}{H_0}\frac{1}{1+\alpha t'}\right),$$

wie zu beweisen war.

Vergleichung von Quecksilber- und Luftthermometer. Das Quecksilber dehnt sich nach der mit dem Luftthermometer gemessenen Temperatur nicht genau gleichförmig aus. Sein Volumen bei der Temperatur t lässt sich ausdrücken

$$v_t=v_0\,(1+0{,}00017905\,.\,t+0{,}0000000252\,.\,t^2)$$

oder auch bis $t=100$ durch den oft sehr bequemen Ausdruck

$$\log v_t=\log v_0+0{,}000078\,.\,t.$$

Dem entsprechend sind die Angaben der gewöhnlichen Quecksilberthermometer, wenn sie nach 22 und 23 rectificirt worden sind, zwischen 0 und 100 etwas niedriger, über 100 dagegen höher als die eines Luftthermometers, wenn auch wegen der gleichzeitigen Ausdehnung des Glases im Allgemeinen weniger stark, als aus der obigen Formel folgen würde. Bis 150^0 bleiben die Abweichungen in der Regel kleiner als $0^0{,}5$, bis 250^0 können sie 4^0, bis 350^0 10^0 betragen. Im Mittel mag man die Correction eines Quecksilberthermometers auf das Luftthermometer etwa annehmen

Angabe	0^0	20	40	60	80	100	150	200	250	300^0
Correction	±0,0	+0,2	+0,3	+0,3	+0,2	±0,0	−0,5	−1,1	−2,4	−3,3.

25. Temperaturbestimmung mit einem Thermoelement.

Bei Untersuchungen, wo die grosse Masse oder der Umfang eines Quecksilberthermometers hinderlich ist, kann oft die durch Temperaturdifferenz an den Contactstellen zweier Metalle (Wismuth—Antimon, Eisen—Neusilber, Platin—Eisen) auftretende elektromotorische Kraft zur Messung benutzt werden. Man löthet zwei gleich lange, z. B. Eisen- und Neusilber-Drähte an einander und mit den anderen Enden an Kupferdrähte. Bringt man die erstere Löthstelle an den Punct, dessen Temperatur gesucht wird, und erhält die beiden anderen Löthstellen zusammen auf einer bekannten Temperatur (etwa durch Eis auf 0°), so entsteht eine elektromotorische Kraft. Letztere wird gemessen, indem man die Enden der Kupferdrähte mit einem Galvanometer verbindet und den Ausschlag beobachtet.

Für kleinere Temperaturdifferenzen (bis 20° etwa) kann Proportionalität der Stromstärke mit der Temperaturdifferenz angenommen werden. Man braucht also nur einmal die Stromstärke bei bekannter Differenz zu messen, um aus jeder Beobachtung die Temperatur abzuleiten. Als Galvanometer dient ein solches mit Spiegelablesung mit einem Multiplicator aus wenigen Windungen dicken Drahtes.

Für grössere Differenzen, oder auch wenn der gewöhnliche Thermo-Multiplicator gebraucht wird, bei welchem die Stromstärken nicht aus den Ausschlägen berechnet werden können, wird empirisch eine Tabelle construirt, indem die Ausschläge für einige Temperaturen beobachtet werden. Hieraus interpolirt man durch Rechnung oder auf graphischem Wege eine Tabelle zum Gebrauch.

Fig. 3.



Eine bequeme Form des Thermoelementes ist folgende. *a* und *b* sind der Eisen- und Neusilberdraht (oder Platindraht zum Gebrauch in Quecksilber), welche durch einen Kork in ein Glasröhrchen mit Alcohol gehen, innerhalb dessen die durch den zweiten Kork geführten Kupferdrähte angelöthet sind. In den Alcohol kann ein kleines Thermometer eingeführt werden.

26. Bestimmung des Wärme-Ausdehnungscoefficienten.

Ausdehnungscoefficient nennt man die Verlängerung eines Stabes von der Länge Eins, bei der Temperaturerhöhung um 1°.

I. Durch Längenmessung.

Wenn die Länge eines Stabes $= l$ ist, und derselbe sich bei der Temperaturerhöhung t um λ verlängert, so ist der Ausdehnungscoefficient $\beta = \frac{\lambda}{l t}$. Vgl. übrigens das Beispiel in 3.

Die geringen Verlängerungen verlangen feine Hülfsmittel zu ihrer Messung. Wird ein Contact-Hebel angewandt, dessen Drehungswinkel α gemessen wird, so ist $\lambda = r \sin \alpha$, durch r den Abstand des Contactpunctes von der Drehungsaxe bezeichnet, und vorausgesetzt, dass bei einer der Temperaturen der Hebelarm zur Richtung des Stabes senkrecht ist.

Der Drehungswinkel wird zweckmässig durch Beobachtung einer Scale in einem am Contacthebel befestigten Spiegel gemessen. Wir nehmen an, bei der einen Beobachtung erscheine im Fernrohr der Fusspunct des vom Spiegel auf die Scale gefällten Perpendikels, dessen Länge, in dem Scalentheil als Längeneinheit ausgedrückt, $= R$ sei. Die Verschiebung des Bildes bei der Temperaturänderung betrage n Scalentheile, so ist $\alpha = \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{n}{R}$. Da man für ein kleines α setzen kann $2 \sin \alpha = \text{tang}\, 2\alpha$, so wäre in diesem Falle $\lambda = \frac{n}{2} \frac{r}{R}$. Vergl. auch (48).

II. Durch Wägung.

Am häufigsten entsteht für Glassorten das Bedürfniss einer genauen Kenntniss des Ausdehnungscoefficienten, wobei ein Gewichtsverfahren angewandt werden kann. Man wägt einen in eine Spitze ausgezogenen Ballon bei zwei verschiedenen Temperaturen mit Quecksilber gefüllt. Zur Füllung taucht man zuerst die Spitze des vorher erwärmten Ballons in Quecksilber, worauf beim Erkalten eine Quantität des letzteren aufgesaugt wird. Diess wiederholt man, bis der Ballon ganz gefüllt ist, nöthigenfalls zuletzt, indem das Quecksilber zum Sieden gebracht wird, taucht ihn endlich in ein Gefäss mit

erwärmtem Quecksilber unter und lässt dieses bis zu einer Temperatur t_0 abkühlen. Die Wägung ergebe das Nettogewicht p_0 des Quecksilbers. Alsdann erwärmt man bis zur Temperatur t_1, wobei eine gewisse Quecksilbermenge ausfliesst, und bestimmt wieder das Gewicht p_1. Dann berechnet sich der cubische Ausdehnungscoefficient

$$3\beta = 0{,}0001815 - \frac{p_0 - p_1}{p_0 (t_1 - t_0)} .$$

27. Siedepunct einer Flüssigkeit.

Siedepunct ist die Temperatur der Dämpfe, welche aus der unter dem Druck von 760^{mm} Quecksilber von 0^0 siedenden Flüssigkeit aufsteigen. Die directen Angaben des Thermometers erfordern zwei Correctionen.

A) In der Regel befindet sich ein Theil des Quecksilberfadens ausserhalb der Dämpfe. Beträgt dessen Länge a Grade, ist t' die mittlere Temperatur des herausragenden Fadens und t die Angabe des Thermometers, so muss zu der letzteren addirt werden

$$0{,}00016 . a (t - t').$$

0,00016 ist nämlich der Unterschied der cubischen Ausdehnungscoefficienten von Quecksilber und Glas, oder der scheinbare Ausdehnungscoefficient von Quecksilber in Glas.

Die mittlere Temperatur t' des herausragenden Fadens zu bestimmen ist schwierig. Man nimmt, in Ermangelung von etwas Besserem, wohl ein zweites kleines Thermometer und bringt dessen Kugel in mittlerer Höhe mit dem herausragenden Thermometer in Berührung. Bei längeren massiven Thermometern mag für t' die Lufttemperatur und anstatt 0,00016 etwa 0,00012 gesetzt werden.

B) Der Siedepunct muss von dem zufällig stattfindenden Barometerstande b (20) auf 760^{mm} reducirt werden. Nun wird freilich in den seltensten Fällen für die Flüssigkeit die Grösse der Zunahme des Siedepunctes mit dem Barometerstande bekannt sein, was zur genauen Correction nöthig wäre. Da indessen die Siedetemperatur der untersuchten Flüssigkeiten in der Nähe von 760^{mm} Druck sich nahezu nach demselben Gesetze ändert, da nämlich im Mittel diese Temperatur auf 1^{mm} Quecksilber um 0^0,0375 oder $^3/_{80}$ Grad zunimmt, so lässt sich die

Correction genähert anbringen dadurch, dass zu der beobachteten Temperatur hinzugefügt wird

$$0{,}0375\,.\,(760-b).$$

Das Thermometer taucht nur in den Dampf der Flüssigkeit. — Zum Zwecke gleichmässigen Siedens legt man in die letztere Stückchen Platinblech. — Vgl. übrigens (22).

28. Bestimmung der Luftfeuchtigkeit (Hygrometrie).

Die hier zu ermittelnden Grössen können sein

1) die Dichtigkeit des Wasserdampfes in der Luft, d. h. das Gewicht des in 1 Cub. Cm. Luft enthaltenen Wassers in Grammen. Weil diese Zahl sehr klein ist, pflegt man sie mit 1000000 multiplicirt anzugeben, wodurch man also den Wassergehalt von 1 Cubikmeter Luft in Grammen ausgedrückt erhält. Diese Grösse heisst in der Meteorologie die absolute Feuchtigkeit der Luft; wir bezeichnen sie im Folgenden mit f.

2) Die relative Feuchtigkeit, oder das Verhältniss des wirklich vorhandenen Wassergehaltes zu demjenigen, bei welchem die Luft mit Wasser gesättigt wäre. Diese Grösse ergibt sich aus der absoluten Feuchtigkeit f und der Lufttemperatur, zu welcher man aus Tab. 13 das Maximum f' des möglichen Wassergehalts entnimmt, als $\frac{f}{f'}$.

3) Die Spannkraft e des Wasserdampfes in der Luft.

Wird die Spannkraft in Millimetern Quecksilber gemessen, so hängen Spannkraft e, absolute Feuchtigkeit f und Lufttemperatur t durch die Formeln zusammen

$$e = 0{,}943\,.\,(1+0{,}003665\,.\,t)\,.\,f,$$

oder

$$f = 1{,}060\,.\,\frac{e}{1+0{,}003665\,.\,t},$$

so dass die Bestimmung von t und e oder f zur Berechnung aller Grössen ausreicht.

Die Dampfdichte des Wassers ist nämlich $=0{,}623$; also wiegt ein Cubikmeter Wasserdampf von der Spannkraft e bei der Temperatur t, da derselbe in gewöhnlicher Temperatur das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz befolgt (18), $0{,}623\,.\,\frac{1293}{1+0{,}003665\,.\,t}\cdot\frac{e}{760}$ Gramm.

I. Daniell's und Regnault's Hygrometer. Mit diesen Instrumenten wird direct der Thaupunct, d. h. die Temperatur τ, bei welcher die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist, bestimmt. In Tab. 13 findet man alsdann zu jedem Werthe von τ zwischen -10^0 und $+30^0$ den zugehörigen Wassergehalt f von 1 Cubikmeter Luft oder die mit 1000000 multiplicirte Dichtigkeit, sowie die Spannkraft e des bei der Temperatur τ gesättigten Wasserdampfes; und zwar ist die so entnommene Spannkraft ohne Weiteres die in der Atmosphäre stattfindende. Die Dichtigkeit verlangt eine Correction, weil die Luft in der Nähe des Instrumentes abgekühlt also verdichtet worden ist. Der aus der Tabelle zu τ entnommene Wassergehalt ist also zu gross und muss, da der Dampf sich erfahrungsmässig ausdehnt wie ein permanentes Gas, multiplicirt werden mit $\frac{1 + 0{,}003665 . \tau}{1 + 0{,}003665 . t} = \frac{273 + \tau}{273 + t}$, wenn t die Lufttemperatur bedeutet.

Bei dem Daniell'schen wie bei dem Regnault'schen Hygrometer lässt man zunächst durch Verdampfen von Aether die Temperatur der glänzenden Fläche sinken, bis man eine Trübung durch niedergeschlagenes Wasser bemerkt. Jetzt unterbricht man das Verdampfen des Aethers, die Temperatur steigt, und man beobachtet den Stand des Thermometers, bei welchem der Niederschlag zu verschwinden anfängt. Nach einigen orientirenden Versuchen gelingt es leicht, die Temperaturen des Entstehens und Verschwindens einander auf einen kleinen Bruchtheil eines Grades zu nähern. Das Mittel aus beiden ist dann der gesuchte Thaupunct τ der Luft. Als höchstes Ziel der Genauigkeit gibt Regnault für sein Instrument eine solche Regulirung des Wasserabflusses aus dem Aspirator (des Durchstreichens der Luft durch den Aether) an, dass zeitweilig ein Niederschlag entsteht und verschwindet. Die abgelesene Temperatur ist dann ohne Weiteres der Thaupunct. — Bei einer Bestimmung mit Daniell's Hygrometer sehe man darauf, dass die von dem Körper, vom Athmen u. s. w. herrührende Feuchtigkeit möglichst von der Thaufläche entfernt bleibe.

II. An dem August'schen Psychrometer wird die atmosphärische Feuchtigkeit aus der Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher Wasser in der Luft verdampft, welche Geschwin-

digkeit wiederum aus der Abkühlung eines befeuchteten Thermometers erkannt wird. Wenn nämlich

t die Lufttemperatur (Temperatur eines trocknen Thermometers),

t' die Temperatur des feuchten Thermometers,

e' das bei t' mögliche Maximum der Spannkraft des Wasserdampfes, wie es aus Tab. 13 entnommen wird,

b den Barometerstand in Mm.

bedeutet, so erhält man die wirkliche Dampfspannung e nach der Formel

$$e = e' - 0{,}00074 . b . (t - t').$$

Ist e gefunden, so kann man die absolute Feuchtigkeit f (Wassergehalt von 1 Cub.-Meter Luft) aus der Formel S. 72 berechnen.

Die Constante 0,00074 gilt für Beobachtungen in freier, mässig bewegter Luft. In ruhender Luft ist eine grössere Zahl einzusetzen, die für ein geschlossenes kleines Zimmer bis zu 0,0012 steigen kann. Da allgemeine Regeln über die Veränderlichkeit nicht bekannt sind, so stellt man am besten bei Zimmerbeobachtungen durch Bewegung der Thermometer die Bedingungen der Constante 0,00074 her.

Bei den mancherlei Fehlerquellen, denen diese Bestimmungsweise unterworfen ist, genügt es häufig, für b einen mittleren Barometerstand anzunehmen. Setzt man $b = 740$, so wird $e = e' - 0{,}55 (t - t')$. Genähert kann man auch f nach der Formel $f = f' - 0{,}6 (t - t')$ berechnen, worin man für f' den aus Tab. 13 zu t' entnommenen Werth setzt. Stellt man, etwa bei einer Dampfdichtebestimmung, Psychrometerbeobachtungen in einem mässig grossen geschlossenen Wagezimmer an, so wird man hinreichend genau die Spannkraft des Wasserdampfes gleich $e' - 0{,}75 (t - t')$ setzen können.

Beispiel: Es sei gefunden $t = 19^0{,}50$, $t' = 13^0{,}42$; der Barometerstand sei $b = 739^{mm}$. Man findet zu t' in Tab. 13 $e' = 11{,}44^{mm}$. Davon ist abzuziehen $0{,}00074 . 739 . 6{,}08 = 3{,}33^{mm}$, also ist die Dampfspannung $e = 8{,}11^{mm}$. Hierzu berechnet sich der Wassergehalt von 1 Cub.-Meter bei der Temperatur $19^0{,}5$ nach S. 72

$$f = \frac{1{,}060 . 8{,}11}{1 + 0{,}003665 . 19{,}5} = 8{,}03 \text{ gr.}$$

Nach den Näherungsformeln wird

$$e = 11{,}44 - 0{,}55 . 6{,}08 = 8{,}10^{mm} \text{ und}$$
$$f = 11{,}59 - 0{,}6 . 6{,}08 = 7{,}94 \text{ gr.}$$

III. Ganz direct erhält man den Wassergehalt der Luft, wenn man mittels eines Aspirators ein gemessenes Volumen derselben durch eine mit Stücken Chlorcalcium, oder Bimstein mit concentrirter Schwefelsäure, oder wasserfreier Phosphorsäure gefüllte Röhre saugt und die durch die Absorption des Wassers eintretende Gewichtszunahme bestimmt.

29. Bestimmung der specifischen Wärme nach der Mischungsmethode.

Specifische Wärme oder Wärmecapacität eines Körpers ist das Verhältniss der Wärmemengen, welche dem Körper und einer gleichen Wassermasse zugeführt werden müssen, damit beide eine gleiche Temperaturerhöhung erfahren. Setzt man wie gewöhnlich die Wärmemenge, welche 1 Gramm Wasser um 1^0 erwärmt, gleich Eins, so kann man sagen: specifische Wärme einer Substanz ist die Wärmemenge, welche 1 Gramm derselben um 1^0 erwärmt.

Streng genommen, ist die specifische Wärme keine constante Grösse, indem die Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung um 1^0 nothwendig ist, mit der Temperatur ein wenig steigt. Die Veränderlichkeit ist für das Wasser in Tab. 14 angegeben. Man trägt derselben Rechnung, indem man als Einheit die Wärmemenge setzt, welche 1 Gr. Wasser von 0^0 auf 1^0 erwärmt. In der Regel braucht keine Rücksicht auf diesen kleinen Unterschied genommen zu werden. Wo nichts anderes bemerkt ist, wird unter specifischer Wärme einer Substanz die mittlere zwischen 0 und 100 verstanden.

Der zu untersuchende feste Körper wird gewogen, auf eine gemessene Temperatur erwärmt, mit einer gewogenen Wassermenge gemischt und die Temperaturzunahme der letzteren sowie die Temperaturabnahme des Körpers bis zu der gemeinschaftlichen Endtemperatur bestimmt. Ist dabei

T die Temperatur des erhitzten Körpers,
t die Anfangstemperatur des Wassers,
τ die gemeinschaftliche Endtemperatur,
M das Gewicht des Körpers,
m das Gewicht das Wassers vermehrt um den Wasserwerth der übrigen Theile des Calorimeters, (siehe unten)

so findet sich die specifische Wärme C des Körpers aus der Formel

$$C = \frac{m}{M} \frac{\tau - t}{T - \tau}.$$

Es muss berücksichtigt werden, dass die Gefässwände und das Thermometer im Calorimeter an der Erwärmung theilnehmen. Das Gefäss besteht aus dünnem Metallblech (z. B. Rauschgold oder Silberblech). Ist γ die specifische Wärme des betreffenden Metalles (Tab. 14), μ das Gewicht des Gefässes, so ist, um dasselbe von t auf τ zu erwärmen, die Wärmemenge $\mu\gamma(\tau - t)$ nothwendig. Die Wärmemenge $\mu\gamma$, welche die Temperatur eines Körpers um 1^0 erhöht, nennt man seinen Wasserwerth. — Der Wasserwerth des Thermometers muss durch einen Versuch bestimmt werden. Zu dem Zweck erwärmt man dasselbe, etwa durch Eintauchen in erhitztes Quecksilber, um beiläufig 30^0, taucht es rasch in eine gewogene Wassermenge, in welchem sich ein zweites empfindliches Thermometer befindet, und beobachtet die dadurch hervorgebrachte Temperaturerhöhung des Wassers. Dieselbe multiplicirt mit der Masse des Wassers, dividirt durch die Temperaturabnahme des vorher erhitzten Thermometers gibt dessen Wasserwerth.

Für m ist in obiger Formel also einzusetzen die Summe der so ein für allemal bestimmten Wasserwerthe der festen Theile des Calorimeters vermehrt um das Nettogewicht des zur Füllung gebrauchten Wassers.

Die unvermeidliche Wärmeabgabe des Calorimeters an die Umgebung während des Versuches wird am einfachsten dadurch eliminirt, dass man die Anfangstemperatur t des Calorimeters möglichst nahe um ebensoviel tiefer als die Zimmertemperatur nimmt, wie die Schlusstemperatur τ höher sein wird. Zu diesem Zwecke wird die zu erwartende Temperaturerhöhung durch einen Vorversuch, oder wenn die specifische Wärme ungefähr bekannt ist, durch Rechnung näherungsweise bestimmt. Damit übrigens die angenäherte Erfüllung dieser Forderung genüge, dürfen die Temperaturänderungen im Calorimeter eine mässige Grösse (10^0) nicht übersteigen. Ferner besteht das Wassergefäss um der geringeren Ausstrahlung willen aus aussen polirtem Blech und wird auf eine die Wärme

schlecht leitende Unterlage (3 Holzspitzen oder auch gekreuzte Seidenfäden) gestellt.

Die anfängliche Erwärmung des Körpers wird in einem durch siedendes Wasser oder die Dämpfe von siedendem Wasser äusserlich geheizten Raume (ausser den bekannten Apparaten von Regnault siehe auch denjenigen von Neumann, Pogg. Ann. Bd. 120. S. 350.) hervorgebracht und muss fortgesetzt werden, bis das darin befindliche Thermometer eine stationäre Temperatur anzeigt. — Zerstossene Körper werden dabei in einem leichten Körbchen aus Drahtgeflecht gehalten, dessen Wasserwerth auf leicht zu bestimmende Weise in Rechnung gesetzt wird. — Während der Beobachtung am Calorimeter wird das Wasser beständig mit einem kleinen Rührer, dessen Wasserwerth wie der des Gefässes bestimmt werden kann, in Bewegung erhalten. — Ist Wasser nicht anwendbar, so nimmt man eine andere Flüssigkeit (z. B. Terpentin-Oel) von bekannter specifischer Wärme (Tab. 14) und multiplicirt mit dieser das nach obiger Formel berechnete Resultat.

Beispiel. 1. Wasserwerth des Gefässes und des Rührers. Beide Theile waren von Messing und wogen zusammen $\mu = 19$ Gr. Die specifische Wärme des Messings ist $\gamma = 0{,}094$, also der Wasserwerth $\mu\gamma = 19 . 0{,}094 = 1{,}8$ Gr.

2. Wasserwerth des Thermometers. Das Thermometer wurde auf 45° erwärmt und in ein kleines Gefäss mit 20 Gr. Wasser von der Temperatur 16°,25 gebracht. Diese Temperatur stieg dadurch auf 17°,10. Der Wasserwerth des Thermometers beträgt also $20 . \frac{17{,}10 - 16{,}25}{45 - 17{,}1} = 0{,}6$ Gr. Der Wasserwerth der festen Theile des Calorimeters ist also zusammen = 2,4 Gr.

3. Der zu bestimmende Körper wog $M = 48{,}3$ Gr.
Die Wassermenge wog netto 74,0 Gr., also $m = 74{,}0 + 2{,}4 = 76{,}4$ Gr.
Die Temperatur des erhitzten Körpers $T = 96°{,}7$.
Die Anfangstemperatur des Wassers $t = 11°{,}05$.
Die gemeinschaftliche Endtemperatur $\tau = 16°{,}74$.
(Die Zimmertemperatur = 14°)
Hieraus findet sich die specifische Wärme

$$C = \frac{76{,}4}{48{,}3} . \frac{16{,}74 - 11{,}05}{96{,}7 - 16{,}74} = 0{,}1125.$$

Um die specifische Wärme einer Flüssigkeit nach der Mischungsmethode zu bestimmen, füllt man mit ihr das Calorimeter, erhitzt einen gewogenen Körper von bereits bekannter specifischer Wärme und verfährt wie oben. Bedeuten

M, T, C Gewicht, Temperatur und specifische Wärme des erhitzten Körpers,
t die Anfangstemperatur der Flüssigkeit,
τ die gemeinschaftliche Endtemperatur,
m das Nettogewicht der Flüssigkeit,
w den Wasserwerth der festen Theile des Calorimeters,

so ist die gesuchte specifische Wärme c der Flüssigkeit

$$c = C \frac{M}{m} \frac{T - \tau}{\tau - t} - \frac{w}{m}.$$

30. Specifische Wärme nach der Erkaltungsmethode.

Hier werden die Zeiten verglichen, in denen erhitzte Körper, welche sich unter denselben Umständen abkühlen, eine gleich grosse Temperaturänderung erleiden. Das Verfahren liefert nur bei Flüssigkeiten oder bei gut leitenden, gepulverten festen Körpern brauchbare Resultate.

Man füllt mit der Substanz ein kleines Gefäss aus dünnem polirten Metall, in welchem ein empfindliches Thermometer sich befindet. Feste Körper werden fest eingestampft. Nach der vollständigen Füllung wird das Gefäss durch einen Deckel geschlossen. Man erwärmt es mit der Substanz, bringt es in einen Metall-Behälter, der durch eine Luftpumpe luftleer gemacht wird, und beobachtet die Temperatur in Verbindung mit der Zeit. Der Behälter wird von aussen durch Umgebung mit einer grösseren Wassermenge oder mit schmelzendem Eise auf constanter Temperatur erhalten.

Für nicht zu kleine Mengen flüssiger Körper kann man auch die Abkühlungsgeschwindigkeiten in einem und demselben geschlossenen Metallgefässe in der Luft beobachten.

Es seien also zwei Versuchsreihen bei der Füllung mit verschiedenen Substanzen angestellt worden. Nennen wir

m und M die zur Füllung des Gefässes gebrauchten Mengen,
w den Wasserwerth des Gefässes mit dem Thermometer (S. 76),
ϑ und θ die Zeiten, welche bei beiden Versuchen verflossen, während eine Abkühlung von derselben Anfangstemperatur zu derselben Endtemperatur erfolgte,
c und C die beiden specifischen Wärmen,

so gilt die Gleichung

$$c = \frac{1}{m}\left[(MC + w)\frac{\vartheta}{\theta} - w\right].$$

Denn es verhalten sich die zu derselben Abkühlung nothwendigen Zeiten umgekehrt, wie die dabei abgegebenen Wärmemengen, das heisst $\frac{\vartheta}{\theta} = \frac{mc + w}{MC + w}$.

Ist also C bekannt, z. B. bei der Anwendung von Wasser $C = 1$, so findet man hieraus c.

Sollte die Temperatur der Umgebung bei beiden Versuchen nicht ganz gleich sein, so ist als die Temperatur der Substanz immer der Ueberschuss über diejenige der Umgebung anzusehen.

Die erste Zeit nach der Erwärmung lässt man vor der Beobachtung verstreichen. Am besten wird jedesmal ein grösserer Satz von Beobachtungen angestellt, indem etwa die Temperatur von 30 zu 30 Secunden notirt wird. Dann stellt man sie in einer Curve dar, indem man die Zeit als Abscisse, die Temperatur als Ordinate auf Coordinatenpapier aufträgt, und entnimmt aus der Curve die Zeiten, welche gleichen Anfangs- und Endtemperaturen (resp. Temperatur-Ueberschüssen über die Umgebung) entsprechen. Man kann so aus einem einzigen Paare von Beobachtungsreihen eine grössere Anzahl von Bestimmungen erhalten, aus denen nachher das Mittel genommen wird.

Beobachtungsfehler haben den geringsten Einfluss, wenn der Ueberschuss der ersten Temperatur über die der Umgebung etwa 3 mal so gross ist als der der zweiten.

31. Specifische Wärme. Methode der Eisschmelzung.

Man bringt den auf die Temperatur t erwärmten Körper vom Gewicht m in trocknes Eis von 0° und lässt ihn sich auf 0° abkühlen, indem er seine Wärme an das ihn allseitig umgebende Eis abgibt. Wird dadurch die Eismenge M geschmolzen, so ist die specifische Wärme des Körpers

$$c = \frac{M}{m}\frac{79{,}4}{t}.$$

Die Gewichtseinheit Eis von 0° braucht nämlich die Wärmemenge 79,4, um in Wasser von 0° verwandelt zu werden.

Die Zufuhr der Wärme von aussen zum Eiscalorimeter wird dadurch vermieden, dass das letztere allseitig mit schmelzendem Eise umgeben wird.

Um die geschmolzene Menge durch Wägung oder Volummessung des Wassers einigermassen genau zu bestimmen (Eiscalorimeter von Lavoisier und Laplace), sind wegen der Adhäsion des Wassers am Eise grosse Mengen des Körpers nöthig.

Eiscalorimeter von Bunsen. (Pogg. Ann. Bd. 141, S. 1.) Hier wird die geschmolzene Menge aus der Volum-Abnahme bestimmt, welche das Wasser bei dem Uebergange aus dem festen in den flüssigen Zustand erleidet. Nimmt das Volumen eines Gemenge von Eis und Wasser um v Cub. Cent. ab, während sich ein Körper von der Masse m Gramm von der Temperatur t auf 0 abkühlt, so ist die specifische Wärme des letzteren

$$c = \frac{v}{m}\,\frac{875{,}4}{t}.$$

1 Gr. Eis hat nach Bunsen das Volumen 1,09082 C. C., dagegen 1 Gr. Wasser von 0^0 1,00012 C. C. Durch Schmelzung von 1 Gr. Eis, wozu die Wärmemenge 79,4 verbraucht wird, entsteht also eine Volumverminderung um 0,0907 C. C. Die Wärmemenge Eins also vermindert das Volumen um $\frac{0{,}0907}{79{,}4} = \frac{1}{875{,}4}$ C. C.

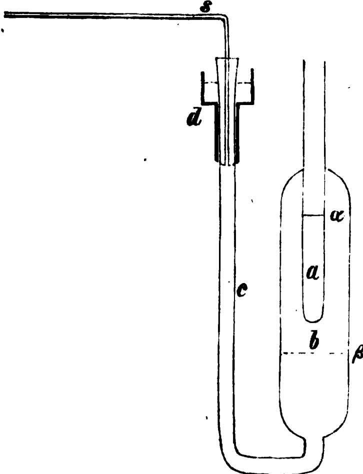


Fig. 4.

Das Bunsen'sche Calorimeter besteht aus den aus Glas zusammengeblasenen Theilen a, b und c; d ist ein aufgekitteter eiserner Aufsatz. c und d sind bis zu den punctirten Linien mit ausgekochtem Quecksilber gefüllt. Ueber letzterem befindet sich in b ausgekochtes Wasser; das Eis in demselben wird vor dem Versuche durch einen Strom Alcohols, der in einer Kältemischung abgekühlt worden ist und durch a hindurchgeführt wird, als Umhüllung von a gebildet.

Zum Gebrauch wird das Instrument an d in einem Halter

befestigt, mit schmelzendem Schnee umgeben, und das calibrirte Scalenrohr *s* durch einen in *d* eingesetzten langen Kork eingedrückt, bis das Quecksilber hinreichend weit über der Theilung steht. Nachdem das Gefäss *a* bis *α* mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit gefüllt worden ist, welche den zu untersuchenden Körper nicht auflöst, erhitzt man denselben, lässt ihn in *a* hineinfallen, und verschliesst *a* mit einem Kork. Das Quecksilber in *s* sinkt und nimmt einen stationären Stand ein. Beträgt das Sinken *p* Scalentheile, und ist das Volumen eines Theiles $= \varphi$, so ist $v = p \cdot \varphi$.

Man erhält φ, indem man das Gewicht μ Gramm eines Quecksilberfadens bestimmt, der n Scalentheile einnimmt. Wenn τ die Temperatur bei dieser Messung, so ist

$$\varphi = \frac{\mu\,(1 + 0{,}00018 \cdot \tau)}{13{,}596 \cdot n} \text{ Cub. Cm.}$$

32. Vergleichung des Wärmeleitungsvermögens zweier Stäbe.

Wir setzen die beiden Stäbe von gleichem Querschnitt voraus und geben ihnen dieselbe Oberflächenbeschaffenheit durch Ueberziehen mit einem undurchsichtigen Lack oder durch Poliren und galvanische Versilberung. Die beiden Enden des Stabes werden auf verschiedene Temperatur gebracht, etwa indem man das eine Ende mit siedendem Wasser und das andere mit schmelzendem Eise umgibt. Weniger gut mag man das eine Ende in der Luft lassen, das andere durch eine sehr constant brennende Lampe erhitzen. Der mittlere Theil des Stabes, an welchem die nachfolgenden Temperaturbeobachtungen angestellt werden, ist durch Schirme vor Strahlung von den Wärmequellen geschützt. Die Temperaturvertheilung wird mit der Zeit constant.

Nachdem diess eingetreten ist, werden an drei gleich weit von einander abstehenden Puncten I, II und III die Temperaturen des Stabes gemessen. Die Temperaturüberschüsse über die umgebende Luft mögen sein t_1 t_2 und t_3. Setzen wir

$$\frac{t_1 + t_3}{t_2} = n.$$

Dasselbe Verfahren wird nun auf den anderen Stab ange-

wandt; die Temperaturüberschüsse an drei ebensoweit von einander abstehenden Puncten durch T_1 T_2 und T_3 bezeichnet, setzen wir

$$\frac{T_1 + T_3}{T_2} = N.$$

Dann verhalten sich die beiden Leitungsvermögen k und K

$$\frac{K}{k} = \left[\frac{\log\left(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - 1}\right)}{\log\left(\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} - 1}\right)}\right]^2.$$

Die Temperaturbestimmung geschieht durch Einsenken empfindlicher kleiner Thermometer in eingebohrte möglichst kleine Vertiefungen, welche man mit Oel gefüllt hat. Die Thermometer müssen genau unter einander verglichen sein. Besser ist die Anwendung eines Thermoelementes (25).

Beweis. Wenn der stationäre Zustand eingetreten ist, so wird jeder Längeneinheit des Stabes ebensoviel Wärme durch Leitung zugeführt, wie von ihr an die umgebende Luft abgegeben wird. t ist der Temperaturüberschuss über die äussere Umgebung, die in der Zeiteinheit abgegebene Wärmemenge also mit t proportional, etwa gleich $a.t$, wo a für beide Stäbe denselben Werth hat. Die durch Leitung zugeführte Menge ist $k.q \frac{d^2 t}{d x^2}$, wenn x den Abstand von der einen Endfläche, k das Leitungsvermögen, q den für beide Stäbe gleichen Querschnitt bezeichnet. Setzen wir $\frac{a}{kq} = \alpha^2$, so ist also α^2 eine dem betr. Leitungsvermögen umgekehrt proportionale Grösse, und es wird die Differentialgleichung für den stationären Temperaturzustand $\frac{d^2 t}{dx^2} = \alpha^2 t$. Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist $t = Ce^{\alpha x} + C'e^{-\alpha x}$, wo C und C' zwei von der Erwärmung der Endflächen abhängige Integrationsconstanten bedeuten. Nennt man t_1 t_2 t_3 die Temperaturen für drei um je die Länge l auseinanderliegende Querschnitte, so findet man leicht durch Einsetzen von x_1, $x_1 + l$ und $x_1 + 2l$ in obige Gleichung, nach Elimination von C und C' die Beziehung $e^{\alpha l} + e^{-\alpha l} = \frac{t_1 + t_3}{t_2} = n$ (s. oben). Oder

$$e^{\alpha l} = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - 1}.$$

Es ist also, bei gleichem l, α proportional dem Ausdruck

$$\log\left(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} - 1}\right),$$

oder das Leitungsvermögen k dem reciproken Quadrate dieser Grösse.

33. Bestimmung des Elasticitätsmodul eines Drahtes oder Stabes durch Ausdehnung.

Man befestigt das obere Ende des zu untersuchenden Drahtes oder Stabes an der Wand oder an einer soliden Stütze, belastet das untere Ende wenn nöthig zuerst mit soviel Gewicht, dass der Draht gestreckt ist, und misst seine Länge. Man fügt eine Mehrbelastung des unteren Endes hinzu und bestimmt die dadurch entstehende Verlängerung. Ausserdem muss der Querschnitt des Drahtes oder des als cylindrisch oder prismatisch angenommenen Stabes gemessen werden. Bedeuten

L die Länge,
P die Mehrbelastung,
l die von derselben hervorgebrachte Verlängerung,
Q den Querschnitt,

so ist der Elasticitätsmodul E der Ausdehnung

$$E = \frac{L}{l} \frac{P}{Q}.$$

Länge und Verlängerung werden in demselben Maafse ausgedrückt. Die Grösse der Zahl E hängt natürlich von den Einheiten ab, in welchen Querschnitt und Gewicht gemessen werden. Man pflegt das Quadratmillimeter und das Kilogramm zu wählen, was man durch ein der Zahl beigesetztes $\frac{\text{Kgr.}}{\square\,\text{mm}}$ bezeichnen kann.

Wenn das obere Ende des Drahtes als vollkommen fest angenommen werden kann, so mag man die Verlängerung als die Verschiebung einer Marke am unteren Ende messen. Im Allgemeinen ist es vorzuziehen, eine Marke oben und eine solche unten am Drahte anzubringen und deren Abstand bei jeder Belastung zu bestimmen.

Bei der Längenmessung mit einem auf einem Maafsstabe verschiebbaren Mikroskop oder dem Kathetometer werden die Marken als zwei feine Querstriche mit dem Diamant oder mit einer feinen Feile angebracht.

Die grösste zur Messung angewandte Verlängerung muss innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben, das heisst, der Draht muss nach Entfernen der Belastung zu seiner früheren Länge zurückkehren, was nach den Versuchen zu controliren ist. Die Elasticitätsgrenze kann dadurch erweitert werden, dass man

den Draht vor den Messungen mit einem grösseren Gewicht belastet. — Selbst bei harten Metallen wird man die Belastung zum Zwecke der Messung nicht über die Hälfte der Belastung steigern, bei welcher das Zerreissen eintritt. Siehe die Tragkraft einiger Substanzen in Tab. 17.

Die Genauigkeit des Resultates wird selbstverständlich vergrössert, wenn die Längen bei mehreren Belastungen beobachtet werden. Vgl. darüber das Beispiel.

Die Grösse des Querschnittes kann durch Messung des Durchmessers bestimmt werden, wobei man sich für kleine Dicken des Fühlhebels oder des Mikroskopes (45) bedient.

Zweitens aber lässt sich der Querschnitt durch Wägung einer gemessenen Länge finden. Ist $\varDelta$ (Tab. 1) das specifische Gewicht der Substanz, wiegen ferner h Mm. des Drahtes m Mgr., so ist der Querschnitt $Q = \frac{m}{h.\varDelta}$ □mm.

Beispiel einer Bestimmung des Elasticitätsmodul eines Eisendrahtes. Zwei Meter des Drahtes wogen 1310 mgr. Das specifische Gewicht wurde = 7,575 gefunden, daraus folgt der Querschnitt $Q = \frac{1310}{2000.7,575} = 0,08647$ □mm.

Nach Tab. 17 ist die Tragkraft dieses Eisendrahtes = 0,08647.61 = 5,4 Kgr. Die höchste Belastung bei dem Versuche darf also etwa 2,7 Kgr. betragen.

Ein Gewicht von etwa 1/2 Kgr. war nothwendig, um den Draht zu strecken; dasselbe ist in den folgenden Zahlen nicht mitgerechnet. Vor den Beobachtungen wurde dem Draht zeitweilig eine Belastung von 4 Kgr. gegeben.

Man beobachtete in der durch die Nummern angegebenen Reihenfolge den Abstand zweier auf dem Drahte gezogenen Marken bei verschiedenen Belastungen:

Nr.	Belastung.	Länge.	*Nr.*	Belastung.	Länge.	Verlängerung durch 2 Kgr.
1.	0,0 Kgr.	913,80mm	*2.*	2,0 Kgr.	914,91mm	1,11mm
3.	0,1 „	913,86 „	*4.*	2,1 „	914,95 „	1,09 „
5.	0,2 „	913,90 „	*6.*	2,2 „	915,00 „	1,10 „
7.	0,3 „	913,98 „	*8.*	2,3 „	915,09 „	1,11 „
					Mittel =	1,102mm

Die Verlängerung ist hiernach $l = 1,102^{mm}$
auf eine Mehrbelastung $P = 2,00$ Kgr.
Folglich ist der Elasticitätsmodul (v. S.)

$$E = \frac{L.P}{l.Q} = \frac{913,8.2}{1,102.0,08647} = 19180 \frac{\text{Kgr.}}{\square^{mm}}.$$

34. Elasticitätsmodul aus Longitudinalschwingungen.

Ein Stab oder Draht, letzterer an beiden Enden eingeklemmt und gespannt, wird der Länge nach gerieben und dadurch zum Tönen gebracht. Durch Vergleichung mit einer Stimmgabel von bekannter Tonhöhe wird die Schwingungszahl bestimmt. Bedeutet

L die Länge des Drahtes in Metern,
Δ das specifische Gewicht desselben, (Tab. 1)
9810 die Beschleunigung durch die Schwere in Millimetern,
n die Schwingungszahl des bei dem Reiben entstehenden Longitudinaltones in einer Secunde, (Tab. 18)

so ist die Schallgeschwindigkeit c in dem Materiale

$$c = 2nL$$

und der Elasticitätsmodul

$$E = \frac{4n^2 L^2 \Delta}{9810} \frac{\text{Kgr.}}{\square^{\text{mm}}}.$$

Beweis. Es ist $c = \sqrt{\frac{Eg}{\Delta}}$, wenn g die Beschleunigung der Schwere und Δ das Gewicht der Volumeinheit der Substanz bedeutet. Da man für die Definition des Elasticitätsmodul Mm. als Längeneinheit und Kgr. als Gewichtseinheit gewählt hat — eine Inconsequenz, denn zum Mm. gehört das Mgr. —, so wäre für Δ das Gewicht von 1 Cub. Mm. in Kgr. zu setzen. Es kommt aber offenbar auf das Nämliche hinaus, wenn man für Δ das specifische Gewicht setzt und L in Meter, dagegen g in Mm. ausdrückt.

Die Longitudinalschwingungen werden durch Reiben mit einem wollenen Lappen erzeugt, welcher für Metall oder Holz mit Colofonium bestrichen, für Glas angefeuchtet worden ist. — Ein gespannter, an den Enden eingeklemmter Draht wird in der Mitte gerieben. Einen Stab hält man in der Mitte fest und reibt die eine Hälfte.

Bei einem ausgespanntem Drahte, dessen Länge sich verkürzen oder verlängern lässt, beobachtet man genauer, indem man ihn auf die Tonhöhe der Stimmgabel abstimmt, als wenn man Ton-Intervalle zu schätzen versucht. — Es ist oft schwierig, die Octave zu bestimmen, in welcher die meistens sehr hohen Töne liegen. Ein derartiger Fehler wird übrigens im Resultate leicht bemerkt, weil er dieses immer mindestens viermal zu

klein oder zu gross werden lässt, und der wahre Werth meistens innerhalb engerer Grenzen bereits bekannt ist.

Die aus der Tonhöhe bestimmten Elasticitätsmoduln fallen gewöhnlich um einige Procente grösser aus, als die durch Verlängerung bestimmten, weil zwischen der Belastung und der Längenbestimmung Zeit verstreicht, und weil während derselben unvermeidlich eine kleine Ausdehnung vermöge der elastischen Nachwirkung hinzutritt.

Beispiel: Der vorige Eisendraht gab bei der Länge $L = 1{,}361$ met. den Longitudinalton ais_3. Zu diesem findet sich aus Tab. 18 die Schwingungszahl $n = 1865$. Das specifische Gewicht $\Delta = 7{,}575$ gesetzt, findet sich

$$E = \frac{4 \,.\, 1865^2 \,.\, 1{,}361^2 \,.\, 7{,}575}{9810} = 19900 \, \frac{\text{Kgr.}}{\square^{\text{mm}}}.$$

Andere Definition des Elasticitätsmodul.

Die Anwendung der vorigen Formeln setzt den Elasticitätsmodul einer Substanz gleich dem Gewicht (Kgr.), welches man an einen Draht vom Querschnitt $= 1$ ($\square^{\text{mm}}$) anhängen müsste, um seine Länge zu verdoppeln; vorausgesetzt, dass bis zu dieser Ausdehnung die Verlängerung der Belastung proportional bliebe.

Eine andere Definition, welche einige Vorzüge von der obigen in der Praxis gebräuchlichen besitzt, führt anstatt des Querschnittes die Masse der Längeneinheit ein und nennt Elasticitätsmodul diejenige Belastung, (z. B. in Kgr.), welche die Länge eines Drahtes verdoppeln würde, dessen Längeneinheit die Masseneinheit hat (von welchem z. B. 1^{mm} 1^{mgr} wiegt). Man kann diese Definition auch so aussprechen: die Belastung, welche nothwendig wäre, um die Länge eines Drahtes zu verdoppeln, denke man sich durch dieselbe Drahtsorte hergestellt. Die Länge des letzteren Drahtes ist gleich dem Elasticitätsmodul. Und zwar würde, um obigen Definitionen zu entsprechen, diese Länge in Kilometern gemessen werden.

Den Elasticitätsmodul E' nach dieser zweiten Definition erhält man aus dem obigen, mit E bezeichneten, indem man letzteren durch die Dichtigkeit der Substanz dividirt. I. Bei der Bestimmung aus der Verlängerung ist also unter Beibehaltung der Bezeichnungen S. 83 für L, P und l, indem man ausserdem

m gleich der Masse der Längeneinheit (Mgr. und Mm.) setzt,

zu berechnen

$$E' = \frac{L}{l}\,\frac{P}{m}\ \text{Kilometer.}$$

II. Bei der Bestimmung aus der Tonhöhe (v. S.)

$$E' = \frac{4n^2 L^2}{9810}.$$

Unter Nr. I würde also anstatt der Querschnittsbestimmung die einfachere Wägung einer gemessenen Länge auszuführen sein, und Nr. II wird von jeder Wägung unabhängig.

Aus dem Beispiel S. 84 würde der Zahlenwerth nach der letzteren Definition für den Elasticitätscoefficienten des Eisendrahtes erhalten werden, da 1^{mm} $0{,}655^{mgr}$ wog,

$$E' = \frac{913{,}8 . 2}{1{,}102 . 0{,}655} = 2532 \text{ Kilometer};$$

aus dem Beispiel S. 86

$$E'' = \frac{4 . 1865^2 . 1{,}361^2}{9810} = 2627 \text{ Kilometer}.$$

35. Elasticitätsmodul durch Biegung eines Stabes.

I. Man klemme einen horizontalen Stab am einen Ende fest ein und beobachte die Stellung des freien Endes an einem verticalen Maafsstab (z. B. Kathetometer). Man belaste ihn durch das Gewicht P Kgr. am freien Ende und beobachte die dadurch hervorgebrachte Senkung s desselben. Die freie Länge des Stabes sei $= l$. Dann ist der Elasticitätsmodul E,

wenn der Querschnitt des Stabes ein Rechteck mit der aufrechtstehenden Seite a und der horizontalen b ist,

$$E = 4 \frac{P}{s} \frac{l^3}{a^3 b};$$

wenn der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r ist,

$$E = \tfrac{4}{3} \frac{P}{s} \frac{l^3}{r^4 \pi}.$$

II. Die Schwierigkeit einer vollkommen festen Einklemmung wird vermieden, indem man den Stab mit seinen beiden Enden auf zwei feste Unterlagen lose auflegt. Der Abstand der beiden Lager von einander sei gleich l. Bringt dann ein in der Mitte des Stabes angehängtes Gewicht P daselbst die Senkung s' hervor, so ist

für rechteckigen Querschnitt (s. oben)

$$E = \tfrac{1}{4} \frac{P}{s'} \frac{l^3}{a^3 b};$$

für kreisförmigen Querschnitt

$$E = \tfrac{1}{12} \frac{P}{s'} \frac{l^3}{r^4 \pi}.$$

P ist in Kgr., alle Längen sind in Mm. auszudrücken,

um die gewöhnliche Einheit des Elasticitätsmodul (S. 83) zu Grunde zu legen.

Die obigen Formeln setzen voraus, dass die Senkungen im Vergleich mit der Länge klein sind. — Man hat sich auch hier zu überzeugen, dass die Formveränderungen innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben, d. h. dass nach Entfernung des Gewichtes die frühere Gestalt sich wieder herstellt. — Kleine Querschnitte werden durch Wägung bestimmt (S. 84), wobei die obigen Formeln sich vereinfachen lassen, indem man berücksichtigt, dass ab, resp. $r^2\pi$ den Querschnitt bedéutet.

Die Gleichung unter I für den rechteckigen Querschnitt ergibt sich folgendermassen. Bei der Krümmung werden die oberen Fasern ausgedehnt, die unteren verkürzt; die mittelste Schicht bleibt an Länge ungeändert. Bezeichnen wir, vom Befestigungspuncte an gerechnet, durch x die horizontale Coordinate eines Punctes dieser „neutralen" Schicht, durch y die verticale, so wird die Krümmung des Stabes an irgend einem Puncte durch $\frac{d^2 y}{d x^2}$ dargestellt, da der Voraussetzung gemäss die Neigung überall klein ist. Es sei nun z der Abstand einer Faser von der neutralen Schicht, nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, so ist ein Stückchen der Faser im Verhältniss $z \frac{d^2 y}{d x^2}$ zu seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt (oder zusammengedrückt). Eine Schicht von der Breite b und der Dicke dz sucht sich also mit der Kraft $Ez \frac{d^2 y}{d x^2} b\, dz$ zusammenzuziehen, also bilden diese Kräfte in den Schichten vom Abstand $+z$ und $-z$ zusammen ein Drehungsmoment $2\, Eb \frac{d^2 y}{d x^2} z^2 dz$. Das von einem ganzen Querschnitt von der Höhe a und der Breite b entwickelte Drehungsmoment ist also

$$2\, Eb \frac{d^2 y}{d x^2} \int_0^{\frac{a}{2}} z^2\, dz = Eb \frac{a^3}{12} \frac{d^2 y}{d x^2}.$$

Dieses Drehungsmoment der Elasticität muss dem von dem angehängten Gewicht an der Stelle ausgeübten statischen Moment $P\,(l-x)$ gleich sein, also

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{12}{E} \frac{P}{a^3 b} (l-x).$$

Durch zweimalige Integration folgt hieraus die Senkung an der Stelle x

$$y = \frac{12}{E} \frac{P}{a^3 b} \left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right),$$

also die Senkung des Endes, für $x = l$

$$s = \frac{4}{E} \frac{P l^3}{a^3 b}.$$

Dass ferner für denselben Stab, wenn er an beiden Enden lose aufliegt, das Gewicht in der Mitte den 16ten Theil dieser Senkung hervorbringt, folgt daraus, dass man in diesem Falle die Mitte als fest eingeklemmt, jedes Ende durch das Gewicht $\frac{P}{2}$ hinaufgezogen ansehen kann.

36. Elasticitätsmodul eines Drahtes durch Torsionsschwingungen.

Man hänge an den Draht ein Gewicht und versetze es in drehende Schwingungen. Bedeutet

l die Länge des Drahtes in Mm.,
r seinen Halbmesser in Mm.,
K das Trägheitsmoment des schwingenden Gewichtes in Kgr. $\square^{mm}$, bezogen auf die Drehungsaxe, (**53**)
t die Schwingungsdauer in Secunden (die Dauer einer einzelnen Schwingung; vgl. **51**),

so ist der Torsionsmodul der Substanz des Drahtes

$$T = \frac{K l \pi}{9810\, t^2 r^4} = 0{,}000320\, \frac{K l}{t^2 r^4}.$$

Wird als schwingendes Gewicht ein Cylinder mit verticaler Axe benutzt, so ist zu setzen $K = \frac{M R^2}{2}$, wo R den Halbmesser in Mm., M die Masse in Kgr. bedeutet.

Der Torsionsmodul T ist etwa der fünfte Theil des Elasticitätsmodul E (**33**), doch könnte das Verhältniss zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ variiren.

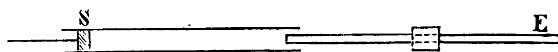
Mit der Ausdehnung eines Stabes durch ein angehängtes Gewicht ist erfahrungsgemäss eine Verkürzung des Durchmessers verbunden. Ist l die Länge, d der Durchmesser, δ diese Verkürzung des letzteren, welche mit der Verlängerung λ verbunden ist, setzen wir das Verhältniss der Quercontraction zur Längenausdehnung $\frac{\delta}{d} : \frac{\lambda}{l} = \mu$, so ist nach der Elasticitäts-Theorie $T = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\mu}$. Erfahrungsgemäss ist $\mu \begin{smallmatrix} > 0 \\ < \frac{1}{2} \end{smallmatrix}$, also jedenfalls $T \begin{smallmatrix} < \frac{1}{2} E \\ > \frac{1}{3} E \end{smallmatrix}$. Für den Mittelwerth $\mu = \frac{1}{4}$ würde $T = \frac{2}{5} E$ sein (Poisson).

37. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit durch Staubfiguren (Kundt).

Die Schallgeschwindigkeit in trockner atmosphärischer Luft von 0^0 beträgt 330 $\frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}}$, in trockner Luft von der Temperatur t aber $330.\sqrt{1+0{,}003665.t}$. Auf den gewöhnlichen Feuchtigkeitsgehalt der Luft wird in mittleren Temperaturen näherungsweise Rücksicht genommen, indem man setzt $c = 330\sqrt{1+0{,}004.t}$ (vgl. **18**).

Diese Zahl kann man benutzen, um Tonhöhen (Schwingungszahlen) longitudinal geriebener Stäbe oder Röhren zu bestimmen. Der Stab wird horizontal gelegt und mit seiner Mitte fest eingeklemmt. Am einen Ende E wird longitudinal gerieben (S. 85), das andere ragt in eine, mindestens 20 Mm. weite, am hinteren Ende durch einen verschiebbaren Stöpsel S verschlossene Glasröhre, welche gut gereinigt worden ist und ein wenig Lycopodiumsamen oder Korkstaub ausgebreitet enthält. Beim Anreiben des Stabes erzeugen die Stösse des freien Endes in der Glasröhre stehende Luft-Schwingungen, durch welche sich der Staub in periodische Figuren ordnet. Durch Verschieben von S findet sich leicht eine Stellung, bei welcher das Aufwirbeln des Staubes möglichst energisch geschieht, und in dieser lässt man den Stöpsel stehen. — Auf einen Stab von kleinem Querschnitt kann man, um das Uebertragen der Stösse an die Luftsäule zu verstärken, eine leichte Kork- oder Pappscheibe aufkleben.

Fig. 5.



Misst man nachher die Länge l der Staubwelle durch Unterlegen eines Maafsstabes, und ist L die Länge des geriebenen Stabes, so ist die Schallgeschwindigkeit in letzterem

$$C = 330.\sqrt{1+0{,}004\,t}.\frac{L}{l}\ \text{Meter},$$

der Elasticitätsmodul also

$$E = \frac{C^2 \varDelta}{9810}\ \frac{\text{Kgr.}}{\square\,\text{Mm.}},\ (\text{S. } 85).$$

wo $\varDelta$ die Dichtigkeit des Stabes bedeutet.

In leicht ersichtlicher Weise kann man das Verfahren auch benutzen, um die Schallgeschwindigkeit in anderen Gasen mit derjenigen der Luft zu vergleichen.

Um eine möglichst genaue Länge der Staubwelle zu erhalten, misst man den Abstand zweier um mehrere (n) Wellenlängen auseinander liegender Schwingungsknoten und dividirt durch n.

Will man alle Wellen benutzen, so liest man die Stellungen $p_0\, p_1\, p_2 \ldots p_n$ sämmtlicher Knoten auf dem Maafsstabe ab. Die Methode der kleinsten Quadrate zeigt (3), dass das wahrscheinlichste Resultat der Wellenlänge nach der Formel erhalten wird

$$l = 6\,\frac{n\,(p_n - p_0) + (n-2)\,(p_{n-1} - p_1) + (n-4)\,(p_{n-2} - p_2) + \cdots}{n\,(n+1)\,(n+2)}.$$

Beispiel. Ein 900 Mm. langer Glasstab gab bei der Lufttemperatur 17° die Knotenpuncte der Staubwellen auf den Theilstrichen 25, 88, 152, 213, 277 Mm. Danach ist $l = 6.\frac{4\,(277-25) + 2\,(213-88)}{4.\,5.\,6} = 62{,}9$ Mm. Die Schallgeschwindigkeit im Glase war also

$$330\,\sqrt{1 + 0{,}004.17}.\frac{900}{62{,}9} = 4890 \text{ Meter};$$

und der Elasticitätsmodul des Glases

$$E = \frac{4890^2.2{,}7}{9810} = 6580\,\frac{\text{Kgr.}}{\square^{\text{mm}}}.$$

38. Messung eines Krystallwinkels mit dem Wollaston'schen Reflexionsgoniometer.

Das Instrument wird so aufgestellt, dass seine Drehungsaxe parallel ist mit einer entfernten horizontalen zur Sehlinie senkrechten Marke O (Fenstersprosse, Dachfirst). Wir setzen zunächst voraus, der Krystall sei bereits nach den auf der folgenden Seite gegebenen Vorschriften an der Axe so befestigt, dass diejenige Krystallkante, an welcher der Winkel gemessen werden soll, in der Axe liegt und ihr parallel ist. Indem man nun das Auge dicht vor den Krystall hält, dreht man an der Axe, bis das in einer Krystallfläche gesehene Bild der oben genannten Marke mit einer direct gesehenen tiefer gelegenen ebenfalls horizontalen Marke U (Rand des Fussbodens, oder auch Spiegelbild der oberen Marke in einem hinter dem Goniometer befestigten, passend geneigten Spiegel) zusammen-

fällt und liest den Stand der Kreistheilung am Index (Nonius) ab. Dann dreht man den Kreis mit dem Krystall, bis das Spiegelbild von *O* in der anderen Krystallfläche mit *U* zusammenfällt, und liest den Index wiederum ab. Der Winkel, um welchen man gedreht hat, ergänzt den gesuchten Winkel der zwei Flächen zu 180°.

Zur genaueren Winkelmessung ist gewöhnlich innerhalb der Axe, um welche sich der getheilte Kreis dreht, concentrisch eine zweite Axe angebracht, welche auf folgende Weise zur Repetition der Messung verwendet wird. Nach Beendigung der obigen beiden Einstellungen stellt man bei ungeänderter Kreisstellung wiederum die erste Krystallfläche durch Drehen der inneren Axe ein; alsdann durch Drehen der äusseren Axe mit dem Kreise die zweite und wiederholt dieses. Hat man so n Drehungen des Kreises ausgeführt, so ist der Gesammtwinkel, um welchen man gedreht hat, dividirt durch n die Ergänzung des Krystallwinkels zu 180°.

Um den Gesammtwinkel zu erhalten, nimmt man den Unterschied der ersten und letzten Ablesung und fügt, je nachdem die Theilung des Kreises bis 180° oder bis 360° geht, soviel mal 2, resp. 4 Rechte hinzu, als der Nullpunct den festen Index passirt hat. Es ist also nur nöthig, die erste und letzte Stellung des Kreises abzulesen.

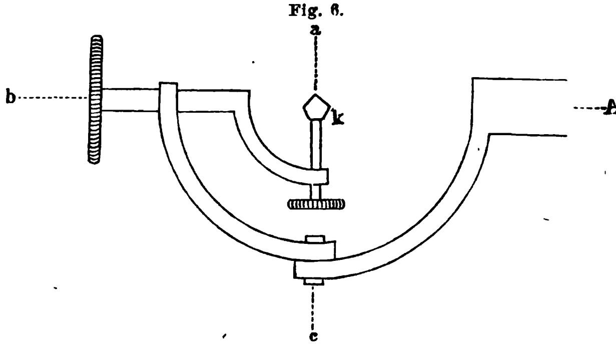
Hat man auch für die zwischenliegenden Einstellungen den Kreis abgelesen, so kann man, um alle Beobachtungen zu benutzen, gerade so rechnen, wie bei der Bestimmung der Länge der Staubwellen am Schlusse des vor. Art. gezeigt worden ist.

Ganz dasselbe Verfahren wird auch bei der Winkelmessung mit dem Repetitionstheodoliten angewandt.

Nähere Anweisung ist noch über die Orientirung des Krystalles zu geben. Zwei auf einander senkrechte Drehungsaxen würden genügen, um der zu messenden Kante jede Richtung zu geben (ursprüngliche Einrichtung von Wollaston). Die gewünschte Stellung aber ist alsdann nur durch Probiren zu erreichen. Systematisch aber kann man die zu messende Kante parallel machen, wenn noch eine dritte Drehungsaxe hinzugefügt wird. (Naumann.)

A ist die Axe des Kreises, *a*, *b*, *c* sind die Orientirungsaxen, *k* der mit etwas Wachs befestigte Krystall.

Fig. 6.



1) Man stelle durch Drehung um *c* die Vorrichtung so, dass *b* die Fortsetzung von *A* bildet, d. h. dass beim Drehen von *A* der Schraubenkopf von *b* ruhig läuft. Nun wird durch Drehung um *a* die eine Krystallfläche (1) zu *A* parallel gestellt. Vergl. darüber unten.

2) Man drehe *c* um einen Winkel von etwa 60 bis 90°, so wird sich im Allgemeinen die Stellung von Fläche (1) gegen die Axe *A* geändert haben. Durch Drehung um *b* stellt man (1) wieder parallel zu *A*. Hierdurch ist (1) parallel zu *A* und zu *b*, also senkrecht zu *c* gemacht; eine Drehung um *c* wird also die Lage von Fläche (1) nicht mehr verändern.

3) Durch Drehung um *c* stellt man die Fläche (2) parallel zu *A*.

Bei jeder folgenden Einstellung einer Axe dürfen die vorher orientirten nicht mehr gedreht werden.

Um zu erkennen, dass eine Fläche mit der Axe *A* parallel ist, markirt man an der oberen und unteren horizontalen Marke die in der Ebene des Theilkreises senkrecht unter einander liegenden Puncte. Stellt man auf eine horizontale Fenstersprosse ein, so wird man am bequemsten eine sie schneidende verticale Leiste und unten den Punct, wo ein von ihr herabgehängtes Senkel die tiefere Horizontalmarke trifft, benutzen. An der Dachfirst wählt man einen Schornstein oder Blitzableiter und unten dessen Bild in dem festen Spiegel. Immer natürlich wird das Goniometer von vorn herein in der

durch die verticalen Marken gehenden Ebene aufgestellt, welche auf den Horizontalmarken senkrecht ist. Die Krystallfläche ist der Kreis-Axe parallel, sobald bei passender Drehung um A das Spiegelbild des oberen Punctes in der Fläche mit dem unteren Puncte zusammenfällt.

Vor der genauen Orientirung des Krystalles prüfe man durch eine oberflächlich ausgeführte, ob nicht schliesslich in einer zur Beobachtung nöthigen Stellung des Kreises einer der Bügel (s. Fig.) sich zwischen das Auge und die untere Marke schieben würde.

39. Bestimmung eines Brechungsverhältnisses mit dem Spectrometer.

Der Körper, dessen Brechungsverhältniss gemessen werden soll, sei als Prisma gegeben, welches aus einem festen Körper durch Schleifen, aus einer Flüssigkeit durch Eingiessen derselben in ein Hohlprisma aus planparallelen Glasplatten hergestellt wird. Die Aufgabe zerfällt in zwei Theile: die Messung des Prismenwinkels und der Ablenkung des Lichtstrahles.

I. Messung des brechenden Winkels.

a) wenn das Fernrohr des Spectrometers feststeht und der Kreis drehbar ist. Das Prisma wird so gestellt, dass die brechenden Flächen gleichen Abstand von der Axe des Kreises haben, d. h. dass nach passender Drehung des letzteren die eine Fläche den früheren Ort der anderen einnimmt. Man stellt durch die Fufsschrauben des Tischchens, auf welchem das Prisma steht, die brechende Kante parallel mit der Drehungsaxe, indem man an den Schrauben ändert, bis bei der Drehung derselbe ferne Punct oder eine Marke im Spalt, in jeder der Flächen gespiegelt, dieselbe Lage gegen das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres einnimmt. Alsdann wird durch Drehung des Kreises das Spiegelbild eines fernen verticalen Objects oder des am Spectrometer befestigten Spaltes in der einen Prismenfläche mit dem Fadenkreuz zur Coincidenz gebracht und die Stellung des Kreises am Nonius abgelesen. Ebenso verfährt man mit der anderen Fläche. Die Differenz der Ablesungen am Kreise ergibt von 180° abgezogen den gesuchten brechenden Winkel φ. Ist das Faden-

kreuz des Fernrohres zu beleuchten, so benutzt man am einfachsten dieses selbst als gespiegeltes Object.

b) Wenn der Kreis feststeht, das Fernrohr mit dem Nonius verschiebbar ist. Man stellt das Prisma so auf, dass ungefähr die Halbirungslinie des brechenden Winkels ein sehr entferntes verticales Object resp. den Spalt des Instrumentes trifft. Sodann wird das Fadenkreuz des Fernrohres auf das Spiegelbild des Objectes (resp. des Spaltes) in beiden Flächen eingestellt. Der Unterschied der Ablesungen am Kreise in beiden Lagen ist der doppelte brechende Winkel.

Das Object muss so weit entfernt sein, dass die Dimensionen des Prisma gegen diese Entfernung verschwinden. Dient als Object der Spalt, so muss das Spaltrohr sorgfältig so herausgezogen werden, dass die durch die Spaltlinse auf das Prisma fallenden Strahlen parallel sind, also dass der Spalt ein unendlich fernes Object vertritt. Zu diesem Zwecke wird zuerst das Fernrohr auf parallele Strahlen eingestellt, d. h. so, dass das Bild eines sehr entfernten Gegenstandes mit dem Fadenkreuz des Oculares in dieselbe Ebene fällt. Diese Forderung ist erfüllt, sobald bei dem seitlichen Bewegen des Auges vor dem Oculare Bild und Fadenkreuz keine Parallaxe zeigen, sich nicht gegen einander verschieben. Nun richtet man das so eingestellte Fernrohr auf den beleuchteten Spalt und zieht das Spaltrohr so weit heraus, dass das Bild des Spaltes im Fernrohr keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt; alsdann vertritt er ein unendlich fernes Object.

II. Messung des Ablenkungswinkels. Die directe Einstellung des Fernrohres auf den Spalt ergibt die Richtung des nicht abgelenkten Lichtstrahles. Um den Ablenkungswinkel des durch das Prisma gegangenen Strahles und daraus den Brechungsindex zu finden hat man zwei Methoden.

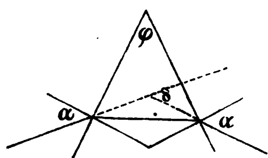
a) Gewöhnlich gibt man dem Prisma die Minimumstellung. Man dreht nämlich, nachdem man das Spaltbild im Gesichtsfeld hat, das Prisma und folgt der Verschiebung des Bildes mit dem Fernrohr. In der Lage, wo der Lichtstrahl die möglichst kleine Ablenkung hat (wo das Bild sich nach derselben Seite bewegt, man mag das Prisma links oder rechts drehen), fixirt man das Prisma, stellt nun das Fadenkreuz auf den Spalt ein und liest den Kreis ab. Die Differenz dieser Einstellung von der directen Einstellung ergibt den Ab-

lenkungswinkel δ. Das Brechungsverhältniss n wird dann, wenn φ den Prismenwinkel bedeutet, nach der Formel berechnet

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

Beweis. Tritt ein Lichtstrahl aus dem leeren Raum in einen Körper, so nennt man die Winkel, welche er vor und nach dem Durchtritt durch die Begrenzungsflächen mit der Normalen auf letzterer bildet, den Einfalls- und den Brechungswinkel. Das Verhältniss der Sinus beider Winkel ist constant und heisst Brechungs-Verhältniss (Index, Exponent) des Körpers. Die Minimalablenkung des Strahls bei dem Durchgang durch ein Prisma tritt ein, wenn der Strahl im Innern des Prisma gleiche Winkel mit beiden brechenden Flächen, also auch mit den beiden Normalen bildet. Letztere Winkel (s. Fig.) sind $= \frac{1}{2}\varphi$. Der Einfallswinkel und ebenso der Austrittswinkel aus dem Prisma seien $= \alpha$, so ist $\sin \alpha = n \sin \frac{\varphi}{2}$. Der Ablenkungswinkel des Strahles ist $\delta = 2\alpha - \varphi$, also $\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi) = \sin \alpha = n \sin \frac{1}{2}\varphi$, woraus obige Formel folgt.

Fig. 7.



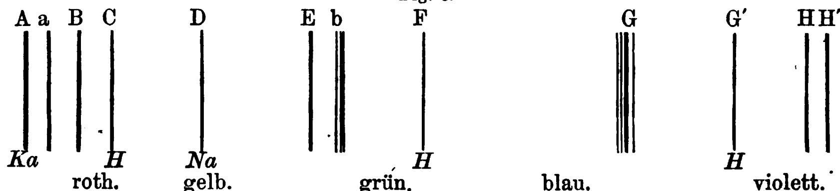
b) Man gibt dem Prisma die Stellung, bei welcher die dem Fernrohre zugewandte Fläche zur Axe desselben senkrecht ist, d. h. bei welcher das gespiegelte Bild des Fadenkreuzes mit letzterem selbst zusammenfällt. Die Methode setzt also eine Beleuchtbarkeit des Fadenkreuzes voraus. Ist δ wieder der Ablenkungswinkel, φ der brechende Winkel des Prisma, so ist

$$n = \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Der Beweis ähnlich wie oben.

Das Brechungsverhältniss muss sich natürlich auf Licht von einer bestimmten Farbe beziehen. Im Sonnenlicht, welches man mit dem Heliostat horizontal auf den Spalt wirft, benutzt man die Fraunhofer'schen Linien, von denen die charakteristischesten in nebenstehender Figur nach ihrer gegenseitigen

Fig. 8.



Stellung, durch ein Flintglasprisma gesehen, gezeichnet sind. Um *A* und *a* zu sehen, stelle man den Spalt nicht zu eng und halte ein rothes Glas vor denselben. *D* zeigt sich bei engem Spalte und starker Vergrösserung als eine sehr feine Doppellinie.

In Ermangelung von Sonnenlicht kann man die Linie *A* durch die Kaliflamme, *D* durch die Natronflamme, *C*, *F* und *G'* durch das Licht des elektrischen Funkens in einer engen mit verdünntem Wasserstoffgase gefüllten Geissler'schen Röhre darstellen.

Der Unterschied der Brechungsverhältnisse für *B* und *H* (Fraunhofer) wird Dispersionsvermögen oder Zerstreuungsgrösse genannt. Mittleres Brechungsverhältniss nennt man dasjenige etwa für *E*.

Zur Reduction des in der Luft gemessenen Brechungsverhältnisses auf den leeren Raum multiplicirt man ersteres mit 1,00029, welche Zahl das Brechungsverhältniss des Lichtes bei dem Uebergang aus dem leeren Raum in atmosphärische Luft darstellt.

40. Spectralanalyse.

Der Apparat zur Spectralanalyse besitzt ausser dem auch am Spectrometer vorhandenen Fernrohr und Spaltrohr ein drittes mit einer Mikrometerscale. Letztere wird in der dem Fernrohre zugewandten Prismenfläche gespiegelt.

Die Einstellung des Spectralapparates ist in folgender Weise vorzunehmen, wobei besonders auch die angegebene Reihenfolge der Operationen eingehalten werden muss.

1) Der Spalt soll einem fernen Object entsprechen und deutlich erscheinen. Wenn die richtige Stellung des Spaltrohres durch eine Marke angedeutet ist, so verschiebt man am Fernrohr, bis der Spalt deutlich erscheint; sonst stelle man erst das Fernrohr auf ein fernes Object ein, richte dann das Fernrohr auf den Spalt und verschiebe ihn so, dass er deutlich erscheint.

2) Das Prisma soll die Minimumstellung erhalten. Um letztere, falls sie nicht vom Mechaniker fixirt ist, zu erzielen, erleuchtet man den Spalt mit der Natronflamme, stellt das Prisma in nahezu richtiger Stellung vor die Spaltlinse und sucht, nachdem man sich mit blossem Auge ungefähr über

die Richtung des austretenden Strahles orientirt hat, das Bild des Spaltes mit dem Fernrohre. Nun dreht man das Prisma (indem man wenn nöthig mit dem Fernrohr folgt), bis das Bild des Spaltes im Fernrohr umkehrt und stellt in dieser Lage das Prisma fest.

3) Das reflectirte Bild der Scale soll deutlich erscheinen. Dieselbe wird durch eine in etwa 20 Cm. Entfernung aufgestellte Lampe erleuchtet. Nachdem durch Drehen des Scalenrohres das Bild gefunden ist, zieht man ersteres heraus, bis die Scalentheile deutlich erscheinen. Spalt und Scalentheile im Fernrohr dürfen sich bei dem Bewegen des Auges vor dem Oculare nicht gegen einander verschieben.

4) Ein bestimmter Scalentheil, bei den den Zeichnungen von Bunsen und Kirchhoff angepassten Scalen der Theil 50, soll mit der Natronlinie zusammenfallen. Man dreht das Scalenrohr, bis diese Stellung erreicht ist und stellt es fest.

Um zu wissen, welchen Puncten der Scale die den verschiedenen chemischen Elementen angehörigen Linien entsprechen, genügt es deren Flammen einzeln zu beobachten und die Scalentheile der Linien (nebst Angabe ihrer ungefähren Helligkeit, Breite, Farbe und ihrer Schärfe) zu notiren. Bequemer ist die Anwendung der nach Kirchhoff's und Bunsen's Zeichnungen veröffentlichten Abbildungen oder der auf den Bunsen'schen Apparat bezogenen Tab. 19. Zu diesem Zwecke kann man auf folgende Weise die Scale des Apparates auf die diesen Zeichnungen zu Grunde liegende reduciren.

Man beobachtet an der Scale des Apparates die Lage einiger bekannter Linien an den Enden und in der Mitte des Spectrums (Sonnenlicht a, D, F, G, H oder etwa Kaα, Naα, Srδ, Kaβ), trägt auf carrirtes Papier die beobachteten Scalentheile als Abscissen, die entsprechenden der Bunsenschen Scale als Ordinaten auf und verbindet die entstehenden Puncte durch eine Curve. Selten wird diese erheblich von einer Geraden abweichen. Aus der Zeichnung findet sich alsdann zu einem beliebigen beobachteten Scalentheil der entsprechende der Bunsen'schen Scale als Ordinate. Ein grosser Theil der Spectralapparate besitzt Scalen, welche mit derjenigen von Bunsen nahe in Uebereinstimmung stehen. Bei einem solchen stelle man Naα auf den Strich 50 ein und mache ebenfalls einen Satz von vergleichenden Beobachtungen. Die Curve construirt

man aber bequemer nur für die Correction der Scale, indem man die Unterschiede gegen die Bunsensche Scale als Ordinaten graphisch aufträgt. Siehe Tab. 19.

Folgende Bemerkungen sind noch zu beachten. Zunächst notire man nicht nur die Lage sondern auch die ungefähre Stärke, Breite und Schärfe der beobachteten Linien. Z. B. fallen Srβ und Liα der Lage nach zusammen; Srβ aber ist verwaschen, Liα ganz scharf. Bezüglich der Unterscheidung der alkalischen Erden beachte man vorzugsweise die (lichtschwachen) charakteristischen Linien im blauen Theil des Spectrums (Srδ und Ca).

Immer werden die Körper am Platindraht in den vorderen Saum der Flamme gebracht, der glühende feste Theil so tief, dass er kein störendes continuirliches Spectrum gibt. Es ist anzurathen, dass man jede Beobachtung einmal mit engem Spalte anstelle um dicht neben einander liegende Linien zu unterscheiden, und dass man sie mit weiterem Spalte wiederhole zur Auffindung lichtschwacher Linien; desgleichen einmal mit kleiner Gasflamme für die leicht verflüchtigten Stoffe (Ka, Li), das andere Mal mit grosser Flamme für schwer flüchtige (Sr, Ba, Ca). Die Spectra der letzteren treten oft erst nach längerer Zeit deutlich hervor. Gewöhnlich wendet man die Körper als Chlorverbindungen an, das Natron jedoch, wegen des Verknisterns des Kochsalzes, bequemer als kohlensaures Natron. Das Schwächerwerden eines Spectrums bei längerer Dauer des Versuchs hat häufig seinen Grund darin, dass die Chlorverbindungen durch das Glühen in die schwerer flüchtigen Oxyde verwandelt werden. Dann lässt sich momentan die Lichtintensität steigern durch Anfeuchten der Perle am Platindraht mit Salzsäure. Zur Reinigung eines Platindrahtes von schwer flüchtigen Stoffen ist am wirksamsten das wiederholte Befeuchten mit Salzsäure und andauerndes Ausglühen in der Spitze der Flamme, auch vor dem Löthrohr oder in der Gebläselampe.

Falsches Licht blende man sorgfältig ab: durch einen hinter der Gasflamme angebrachten schwarzen Schirm, durch eine über das Prisma gestellte Kapsel, welche nur den Weg nach den drei Rohren frei lässt, endlich durch eine auf das Fernrohr gehängte Blende aus dunkelem Papier. Letztere macht zugleich das ermüdende Schliessen des anderen Auges über-

flüssig. Die Scale selbst wird niemals stärker beleuchtet, als zum Erkennen von Theilung und Ziffern nothwendig ist. Im Interesse sehr lichtschwacher Linien mag man das Licht der Scale vorübergehend ganz abblenden.

41. Messung der Wellenlänge eines Lichtstrahles.

Am einfachsten und genauesten wird diese Messung mit dem Spectrometer (**39**) ausgeführt, auf dessen Tisch man, anstatt des Prisma, eine Glasplatte mit sehr feiner Gittertheilung (Nobert'sches Gitter) stellt, die Theilstriche dem Spalte parallel, die Platte senkrecht zum Spaltrohr, die getheilte Fläche dem Fernrohr zugewandt. Homogenes Licht vorausgesetzt, wird bei passender Stellung des Fernrohres dann ausser dem mittleren hellen Bild des Spaltes ein erstes, zweites u. s. w. abgelenktes schwächeres Bild auf jeder Seite beobachtet. Ist l der Werth eines Scalentheiles auf der Glasplatte, bedeuten $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \cdots$ die Ablenkungswinkel der Bilder gegen das mittelste, so ist die Wellenlänge der Lichtsorte

$$\lambda = l \sin \delta_1 = \tfrac{1}{2}\, l \sin \delta_2 = \tfrac{1}{3}\, l \sin \delta_3 \text{ u. s. w.}$$

Von der genau senkrechten Stellung der Gitterplatte macht man sich unabhängig, wenn man nicht die Abstände des abgelenkten Bildes von dem mittelsten, sondern den gegenseitigen Abstand zweier entsprechender Bilder auf beiden Seiten misst und durch 2 dividirt.

Nicht homogenes Licht wird durch das Gitter in Spectra zerlegt, in denen nach obigen Formeln das Licht von grösserer Wellenlänge (roth) am stärksten abgelenkt erscheint. Bei Sonnenlicht, in welchem zur Definition und Einstellung der Farbe die Fraunhoferschen Linien (S. 96) geeignet sind, ist das erste Spectrum und der grösste Theil des zweiten rein; von da an greifen die Spectra übereinander. Um die Linien im Interferenzspectrum nach der Zeichnung des Dispersionsspectrums (S. 96) zu erkennen, muss man beachten, dass ersteres, je weiter nach dem violetten Ende zu, desto mehr gegen letzteres zusammengeschoben erscheint.

42. Messung eines Krümmungshalbmessers mit dem Sphaerometer.

Der Krümmungshalbmesser einer kugelförmigen Fläche, z. B. der Oberfläche einer Linse kann, wenn dieselbe gross genug ist, mit dem Sphärometer in folgender Weise bestimmt werden.

Zuerst wird das Instrument auf eine als eben bekannte Fläche aufgesetzt. Durch Drehen der Mikrometerschraube gibt man nun dem mittelsten Fusse des Sphärometers eine solche Höhe, dass alle vier Spitzen die Ebene berühren. Diese Einstellung wird mit grosser Schärfe daran erkannt, dass bei einer etwas tieferen Stellung der mittelsten Spitze das Instrument wackelt und sich leicht um diesen Stützpunct drehen lässt.

Darauf setzt man das Instrument auf die Fläche, deren Krümmungshalbmesser bestimmt werden soll und dreht wieder an der Schraube, bis alle Spitzen die Fläche gleichzeitig berühren.

Die Stellungen der mittelsten Spitze bei beiden Versuchen unterscheiden sich von einander um eine Anzahl Schraubenumgänge. Die ganze Zahl wird durch Zählen der Umdrehungen oder durch Ablesung an dem seitlichen Maafsstab bestimmt, dessen einzelne Theile gleich der Höhe eines Schraubenganges sind; die Bruchtheile werden an der mit der Schraube verbundenen Kreistheilung abgelesen. Diese Anzahl Schraubenumgänge, mit der Höhe eines Schraubenganges (etwa in Mm.) multiplicirt, gibt den Abstand des mittelsten Fusspunctes von der Ebene der drei festen Füsse, wenn alle vier die gekrümmte Fläche berühren. Es sei

a dieser Abstand,

l die Seite des gleichseitigen Dreiecks, welches die drei festen Spitzen als Eckpuncte hat,

so ist der gesuchte Krümmungshalbmesser r

$$r = \frac{l^2}{6a} + \frac{a}{2}.$$

Beispiel. Aus der Stellung, in welcher alle vier Spitzen eine Ebene berührten, musste die mittelste Spitze um 6,272 Schraubengänge erhoben werden, damit alle vier die Oberfläche einer convexen Linse berührten. Die Höhe eines Schraubenganges war = 0,5 Mm., also

$a = 3{,}136$ Mm. Die Seite des gleichseitigen Dreieckes der drei festen Spitzen war $l = 82{,}5$ Mm. Folglich war der Krümmungshalbmesser der Linsenoberfläche

$$r = \frac{82{,}5^2}{6 \,.\, 3{,}136} + \frac{3{,}136}{2} = 363{,}3 \text{ Mm.}$$

Wie das Sphärometer zur Bestimmung der Dicke einer Platte angewendet, oder wie mit demselben der Planparallelismus einer solchen oder die sphärische Gestalt einer Oberfläche geprüft wird, ist ohne Weiteres klar.

43. Krümmungshalbmesser durch Spiegelung.

Die Bestimmung des Krümmungshalbmessers mit dem Sphärometer ist auf grössere Oberflächen beschränkt. Für kleine spiegelnde Oberflächen lässt sich das folgende Verfahren anwenden.

Man befestigt den Gegenstand so, dass die zu messende Fläche aufrecht steht, und stellt in einiger Entfernung vor ihr zwei Lichter in derselben Höhe und in gleichem Abstande auf. Mitten zwischen die Lichter bringt man ein Fernrohr, welches nach der Fläche gerichtet und auf sie eingestellt wird. Endlich wird dicht vor derselben parallel mit der Verbindungslinie der beiden Lichter ein kleiner auf Glas getheilter Maafsstab angebracht. Die Lichter geben alsdann zwei in der Fläche reflectirte Bilder, deren Abstand auf dem kleinen Maafsstabe mit dem Fernrohre beobachtet wird. Bedeutet nun

l diesen Abstand der Bilder von einander,
L den wirklichen Abstand der beiden Lichter von einander,
A die Entfernung des Mittelpunctes der Lichter von der spiegelnden Fläche,

so ist der Krümmungshalbmesser r der Fläche, in derselben Einheit, in welcher die obigen Abstände ausgedrückt sind,

$$r = \frac{2Al}{L - 2l} \text{ bei einer convexen, und}$$

$$r = \frac{2Al}{L + 2l} \text{ bei einer concaven Fläche.}$$

Je geringer die Krümmung ist, desto grösser muss die Entfernung A genommen werden, damit diese Formeln gültig sind.

Als Lichter sind Flachbrenner einer Petroleum- oder einer Gaslampe zweckmässig, deren scharfe Seiten nach der spiegelnden Fläche gerichtet werden. Mit geringem Fehler mag man auch die Ränder eines Fensters nehmen, vor welchem sich der Beobachter mit dem Fernrohr aufstellt.

Wenn nach der beschriebenen Methode die Krümmung von Linsen bestimmt wird, so entstehen in der Regel auch reflectirte Bilder von der zweiten Fläche. Bei Biconcav- oder Biconvexlinsen sieht man leicht an der aufrechten oder verkehrten Lage der Bilder, welche die richtigen sind.

Der Krümmungshalbmesser einer Concavfläche lässt sich natürlich auch aus der gemessenen Brennweite (44) (als das Doppelte derselben) bestimmen.

Beweis obiger Formel für eine convexe Fläche. Die Verbindungslinie L der beiden Lichter gibt ein Bild im Abstand a hinter der Kugelfläche nach der Regel $\frac{1}{a} = \frac{1}{A} + \frac{2}{r}$. ($\frac{1}{2}r$ ist die Brennweite.) Die Länge λ dieses Bildes ist gegeben durch $\frac{\lambda}{L} = \frac{a}{A}$. Aus diesen beiden Formeln findet sich $a = \frac{Ar}{2A+r}$, $\lambda = \frac{Lr}{2A+r}$. Das Bild erscheint auf den die Glasfläche berührenden Maafsstab projicirt mit der Länge $l = \lambda \frac{A}{A+a}$, woraus durch Einsetzung obiger Werthe von λ und a wird $l = \frac{1}{2} \frac{rL}{A+r}$ oder $r = \frac{2Al}{L-2l}$. Ganz analog findet man die Formel für Hohlflächen.

44. Brennweite einer Linse.

Brennpunct einer Linse ist der Punct, in welchem zur Axe der Linse parallel einfallende Strahlen nach dem Austritt sich schneiden. Der Abstand des Brennpunctes von der Linse ist die Brennweite. Bei Zerstreuungslinsen gibt man der Brennweite das negative Vorzeichen. Nummer einer Brille nennt man ihre Brennweite in Zollen ausgedrückt.

Die beiden Krümmungshalbmesser r und r' einer Linse und ihre Brennweite f stehen mit dem Brechungsverhältniss n der Glassorte in der Beziehung:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \text{ oder } n = \frac{1}{f}\frac{rr'}{r+r'} + 1.$$

Ist eine Fläche concav, so wird hierin ihr Krümmungshalbmesser mit negativem Vorzeichen eingesetzt.

1) Die Brennweite einer Convexlinse kann gemessen werden, indem man mit derselben ein Sonnenbild auf einer matten Glastafel erzeugt und letztere so stellt, dass das Bild scharf begrenzt ist. Der Abstand der Tafel von der Linse ist dann die Brennweite.

2) Oder die Linse wird vor das Objectiv eines Fernrohres gebracht, welches vorher auf einen sehr weiten Gegenstand eingestellt war d. h. sein Bild deutlich erscheinen lässt. Visirt man darauf mit dem Fernrohr durch die Linse nach einem ebenen Object (z. B. Papier mit Schrift), so wird dieses bei einem bestimmten Abstande von der Linse deutlich erscheinen. Dieser Abstand ist die gesuchte Brennweite.

3) Auch das von einem näher liegenden Gegenstande entworfene Bild kann zur Bestimmung der Brennweite angewandt werden. Auf der einen Seite der Linse stellt man ein Licht, auf der anderen einen weissen Schirm in einem solchen Abstande auf, dass ein deutliches Bild des Lichtes auf dem Schirm entsteht. Nennt man a und b die Abstände des Lichtes und des Bildes von der Linse, f die gesuchte Brennweite, so ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ oder } f = \frac{ab}{a+b}.$$

4) Wenn die Grösse des Bildes gleich der des Gegenstandes ist, so befinden sich beide in einem Abstande von der Linse gleich der doppelten Brennweite. Vgl. 5.

5) Die bis hierher gegebenen Methoden setzen voraus, dass die Dicke der Linse gegen die Brennweite vernachlässigt werden kann. Im anderen Falle versteht man unter Brennweite den Abstand des Vereinigungspunctes parallel einfallender Strahlen von der zugehörigen Hauptebene der Linse oder des Systemes von Linsen. Die Hauptebene würde durch Construction erhalten werden, wenn man von einem mit der Axe parallel einfallenden Strahl die Stücke vor dem Eintritt und nach dem Austritt verlängert, bis sie sich schneiden, und durch den Schnittpunct eine zur Axe der Linse senkrechte

Ebene legt. Aber auch ohne die Hauptebene zu kennen, lässt sich die Brennweite dickerer Linsen oder Linsensysteme leicht auf folgende Weise bestimmen. Man stelle auf der einen Seite der Linse um ein Weniges ausserhalb des Brennpunctes einen hell beleuchteten Maafsstab auf, am besten von Glas mit durchfallendem Licht. Gegenüber, auf der anderen Seite der Linse wird ein weisser Schirm in einem solchen Abstande von der Linse aufgestellt, dass auf ihm ein stark vergrössertes deutliches Bild der Theilung erscheint. Ist dann

l die Länge eines Scalentheiles,
L die Länge seines Bildes,
A der Abstand des Schirmes von der Linse,

so ist die gesuchte Brennweite f

$$f = A \frac{l}{L + l}.$$

Auch umgekehrt mag man einen scharf begrenzten Gegenstand in grösserer Entfernung von der Linse aufstellen und das von ihm auf der anderen Seite der Linse entworfene, nun stark verkleinerte Bild messen. Zu diesem Zwecke dient am besten ein Mikrometer auf Glas mit vorgesetzter Loupe, welches so gestellt wird, dass Mikrometertheile und Bild des Gegenstandes durch die Loupe deutlich gesehen werden. Es ist dann in obiger Formel für l die Länge des Bildes, für L die des Gegenstandes, für A dessen Abstand von der Linse zu setzen.

Beweis. Die Abstände A und a des Bildes und des Gegenstandes von den zugehörigen Hauptebenen der Linse hängen durch die Formel $\frac{1}{A} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}$ zusammen. Die Grössen beider verhalten sich $\frac{L}{l} = \frac{A}{a}$. Durch Einsetzen von $\frac{1}{a} = \frac{L}{Al}$ in erstere Gleichung entsteht obiger Ausdruck. Da A gegen die Dicke der Linse gross sein soll, so kann man anstatt des unbekannten Abstandes von der Hauptebene denjenigen von der Linse setzen.

6) Eine Concavlinse, welche kein objectives Bild gibt, das heisst, welche eine negative Brennweite hat, wird mit einer stärkeren Convexlinse von bekannter Brennweite verbunden und nun die gemeinschaftliche Brennweite beider zusammen nach einer der unter 1. bis 4. angegebenen Methoden gemessen. Ist

F diese gemeinschaftliche Brennweite,
F' die der Convexlinse allein, so findet sich die Brennweite f der Concavlinse allein aus der Formel

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{F'} \text{ oder } f = \frac{F.F'}{F' - F}.$$

7) Endlich lässt sich die Brennweite einer Zerstreuungslinse auch dadurch ermitteln, dass man die Grösse des Zerstreuungsbildes misst, welches die Linse von der Sonne auf einem Schirm in gegebenem Abstande entwirft. Bedeutet nämlich
d den Durchmesser der Linsenöffnung,
D den Durchmesser des Zerstreuungsbildes,
A den Abstand des Schirmes von der Linse,
so ist die Brennweite

$$f = \frac{Ad}{d - D + 0{,}0094.A};$$

0,0094 ist die doppelte Tangente des scheinbaren Halbmessers der Sonne. Bei schärferen, nicht zu kleinen Linsen kann man diess Glied vernachlässigen und hat die einfache Regel: derjenige Abstand des Schirms, bei welchem das Zerstreuungsbild den doppelten Durchmesser der Linse hat, ist die Brennweite.

45. Vergrösserungszahl etc. eines optischen Instrumentes.

I. Loupe.

Die Vergrösserungszahl einer Loupe wird aus der Brennweite, welche für dickere oder zusammengesetzte Gläser nach Nr. 5, vor. Art., zu bestimmen ist, berechnet.

Bezeichnen wir nämlich durch
f die Brennweite,
A die kleinste deutliche Sehweite des unbewaffneten Auges,
so ist die Vergrösserungszahl m der Loupe

$$m = \frac{A}{f} + 1.$$

Für das mittlere Auge mag die kleinste deutliche Sehweite gleich 25^{cm} gesetzt werden.

Beweis. Wird ein kleiner Gegenstand von der Länge l in einem Abstande a unter die Loupe gelegt, so dass sein (nicht reelles) Bild im

Abstand A erscheint, so ist $\frac{1}{a} = \frac{1}{A} + \frac{1}{f}$. Das Bild habe die Länge L, so ist die Vergrösserung $\frac{L}{l} = \frac{A}{a} = 1 + \frac{A}{f}$.

II. Fernrohr.

Die Vergrösserungszahl ist das Verhältniss des Winkels, unter welchem ein ferner Gegenstand im Fernrohre erscheint, zu dem Winkel, unter welchem derselbe mit blossem Auge gesehen wird.

1) Ein allgemein anwendbares Verfahren, die Vergrösserungszahl zu bestimmen, ist das folgende. Das Fernrohr wird in einem gegen die eigene Länge grossen Abstande vor einem Maafsstabe (Papierscale, Ziegeldach, Tapetenmuster) aufgestellt, auf welchem zwei Puncte hinreichend markirt sind, um mit blossem Auge gesehen zu werden. Während nun das eine Auge durch das Fernrohr hindurch nach dem Maafsstabe sieht, blickt man mit dem anderen Auge neben dem Fernrohre vorbei nach demselben, so dass die mit beiden Augen gesehenen Bilder sich decken. Wenn so die direct gesehene Länge zwischen den Marken n Theile des im Fernrohr gesehenen Maafsstabes bedeckt, während die wirkliche Länge N Theile beträgt, so ist die Vergrösserungszahl $m = \frac{N}{n}$.

Die Beobachtung wird ausserordentlich erleichtert dadurch, dass man das Fernrohr durch Ausziehen des Oculares so stellt, dass die beiden Bilder bei einer Drehung der Augenaxen sich nicht gegeneinander verschieben. Kurzsichtige Augen müssen natürlich mit der Brille bewaffnet sein.

2) Bei Fernröhren mit convexen Ocularglässern lässt sich fast immer folgendes einfache Verfahren anwenden. Zuerst wird das Fernrohr so weit ausgezogen, dass es einen sehr entfernten Gegenstand deutlich erscheinen lässt. Alsdann nimmt man das Objectiv heraus und ersetzt es durch eine Blende von geringerer Oeffnung (rechteckig ausgeschnittenes Kartenblatt) oder auch durch einen durchsichtigen Maafsstab. Durch die noch übrigen Linsen des Fernrohres wird dann ein objectives Bild der Blende oder des Maafsstabes entworfen werden. Das Verhältniss der Länge des am Orte des Objectivs angebrachten Gegenstandes zu der des Bildes ist die gesuchte Vergrösserungszahl.

Zur Ausführung dieser Messung dient eine kleine durchsichtige Theilung mit vorgesetzter Loupe. Beides muss so vor dem Oculare angebracht werden, dass die Theilung und das Bild der Blende oder des in der Objectivöffnung befindlichen Maaſsstabes deutlich erscheinen.

Die kreisförmige Objectivöffnung selbst kann anstatt obiger Blende benutzt werden, wenn man sich überzeugt hat, dass die von ihrem Rande kommenden Strahlen nicht etwa durch die Diaphragmen des Rohres abgehalten werden, was häufig der Fall ist. Eine Blende von eckiger Gestalt würde diess sogleich erkennen lassen.

Beweis für das Keppler'sche Fernrohr. Ist F die Brennweite des Objectivs, f des Oculars, so ist bekanntlich $\frac{F}{f}$ die Vergrösserung. Der Abstand des Oculares vom Objectiv beträgt bei dem Deutlichsehen eines entfernten Gegenstandes $A = F + f$. Der Gegenstand von der Länge L am Orte des Objectivs gibt demnach ein Bild von der Länge $l = \frac{fL}{A-f} = \frac{fL}{F}$ (vgl. vor. Art. Nr. 5). Also $\frac{L}{l} = \frac{F}{f}$.

3) Sind die Brennweiten der einzelnen Gläser und ihre Abstände bekannt, so lässt die Vergrösserung sich berechnen. Zum Beispiel ist dieselbe für ein astronomisches Fernrohr mit einfachem Ocular und für das Galileische Fernrohr gleich der Brennweite des Objectives dividirt durch die Brennweite des Oculares. Praktisch ist die Bedeutung dieser und anderer Regeln, ausser für den ein Fernrohr herstellenden Optiker, gering; denn die Brennweite des Galileischen Oculares kann nicht direct bestimmt werden, und die Fernröhre mit Convexlinsen sind meist zusammengesetzter Natur. Die oft sehr kleinen Abstände der Ocularlinsen genau zu messen bietet Schwierigkeiten, und ausserdem würde ohne die Bestimmung der Lage der Hauptpuncte nur ein rohes Resultat aus den Formeln hervorgehen.

4) Die Grösse des Gesichtsfeldes ist der Winkel zweier Strahlen, welche vom Fernrohre nach zwei Puncten eines gesehenen fernen Gegenstandes gezogen werden, deren Bilder am Rande des Gesichtsfeldes einander diametral gegenüber liegen. Ist l der wirkliche Abstand dieser Puncte von einander, a ihre Entfernung vom Fernrohr, so ist die Grösse des Gesichtsfeldes in Bogengraden ausgedrückt $= 57^0{,}3 \cdot \frac{l}{a}$.

Zur praktischen Ausführung dient wieder am bequemsten ein entfernt aufgestellter Maafsstab.

III. Mikroskop.

1) Vergrösserungszahl eines Mikroskopes nennt man das Verhältniss des Winkels, unter welchem ein kleiner Gegenstand im Mikroskop gesehen wird, zu demjenigen, unter welchem er in der kleinsten deutlichen Sehweite erscheint. Für das mittlere Auge pflegt man letztere gleich 25 Cm. zu setzen.

Das Verfahren, wonach die Vergrösserung bestimmt wird, entspricht durchaus dem unter Nr. II. 1. für das Fernrohr angegebenen. Unter das Mikroskop wird ein Gegenstand von bekannter Länge gebracht, am einfachsten wieder eine kleine Theilung. In 25^{cm} Abstand unter dem Ocular befestigt man einen Maafsstab. Während das eine Auge durch das Mikroskop nach dem Gegenstande sieht, blickt das andere nach dem Maafsstab, und nun muss wieder die Projection des im Mikroskope gesehenen Bildes auf den Maafsstab gemessen werden. Bedeckt das Bild N Scalentheile, während der Gegenstand wirklich die Länge von n Scalentheilen hat, so ist $\frac{N}{n}$ die Vergrösserungszahl.

Auch kann man über dem Ocular einen kleinen Spiegel, dessen Belegung in der Mitte weggenommen ist, schräg anbringen und den Maafsstab 25^{cm} entfernt seitlich von demselben aufstellen, so dass mit demselben Auge durch das Spiegelglas hindurch das Bild des Gegenstandes im Mikroskop, und im Spiegel reflectirt das Bild des Maafsstabes gesehen wird.

2) Wenn das Mikroskop zu Längenmessungen mittels eines im Ocularrohre angebrachten Mikrometermaafsstabes von bekanntem Theilwerthe benutzt werden soll, so muss eine andere als die vorige Vergrösserungszahl, nämlich das Verhältniss der Länge des auf dem Mikrometer entstehenden objectiven Bildes zu der Länge des Gegenstandes bekannt sein. Die Bestimmung dieser Zahl kann mit Hülfe eines zweiten Mikrometers von gleichem Theilwerthe, welches als Object dient, leicht ausgeführt werden. Die Anzahl Scalentheile des Mikrometers im Oculare, welche durch das Bild von dem Scalentheile des untergelegten Maafsstabes bedeckt werden, gibt die gesuchte Zahl.

Zum Zwecke mikroskopischer Längenmessung ist es übrigens unnöthig, den wirklichen Theilwerth des Mikrometers im Oculare zu kennen. Man kann ihn vielmehr direct im Verhältniss zu dem untergelegten Object bestimmen, indem man für das letztere einmal einen Gegenstand von bekannter Länge (Maafsstab) nimmt.

Es ist bei mikroskopischen Längenmessungen nicht zu übersehen, dass durch die gegenseitige Verschiebung von Objectiv und Ocular die Vergrösserung geändert wird. Das zum Messen dienende Ocular muss also immer dieselbe Stellung im Objectivrohre einnehmen.

46. Saccharimetrie. Bestimmung des optischen Drehungsvermögens.

Der Drehungswinkel α der Polarisationsebene des Lichtes durch eine Rohrzuckerlösung, welche in 1 Cub. Cm. z Gr. Zucker enthält, beträgt in einer Schicht von l^{mm} Länge (nach Wild)

für das gelbe Licht der Natron-Flamme

$$\alpha = 0^0{,}6642 \, . \, zl, \text{ woraus } z = 1{,}5056 \frac{\alpha}{l};$$

für das weisse Licht im Mittel

$$\alpha = 0^0{,}7102 \, . \, zl, \text{ woraus } z = 1{,}4080 \frac{\alpha}{l}.$$

Die Drehung findet nach „rechts" statt, d. h. umgekehrt wie bei dem Korkzieher. Ueber den Gebrauch der verschiedenen Saccharimeter ist Folgendes zu bemerken.

I. Saccharimeter von Mitscherlich.

Man stellt eine Natronflamme (Berzeliuslampe mit Kochsalz am Docht oder Bunsen'sche Gasflamme mit eingeführter Soda-Perle am Platindraht, das Licht des glühenden Drahtes selbst abgeblendet) hinter dem Instrument vor einem schwarzen Schirm auf. Dann bringt man eine leere oder mit reinem Wasser gefüllte Röhre zwischen die Nicol'schen Prismen des Instruments und dreht den Index über dem dem Auge zugewandten getheilten Kreis so, dass die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel erscheint. Dann wird die Röhre mit der Zuckerlösung

gefüllt eingeschoben, wobei das Gesichtsfeld in der früheren Stellung des Index hell erscheinen wird. Die Anzahl Grade, um welche man nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers) drehen muss, damit wieder die Mitte dunkel wird, ist der gesuchte Drehungswinkel α.

Soll der Nullpunct der Kreistheilung auch der Punct sein, von welchem die Winkel gezählt werden, so stellt man ohne Zuckerlösung den Index auf Null und dreht nun am hinteren Nicol, bis die Mitte dunkel ist.

Es gibt immer zwei um 180° verschiedene verdunkelnde Stellungen.

II. Polaristrobometer von Wild.

In diesem Instrument erscheinen Streifen im Gesichtsfeld, welche bei homogenem Natron-Licht hell und dunkel, bei weissem Licht farbig sind. Das Ocular wird zunächst so weit herausgezogen, dass diese Streifen dem Auge möglichst scharf erscheinen.

Die saccharimetrische Einstellung findet gerade so, wie unter I auf die Verdunkelung, so hier auf das Verschwinden der Streifung in der Mitte des Gesichtsfeldes statt. Da das dem Auge abgewandte Nicol'sche Prisma gedreht wird, so ist die Drehung vom Auge aus gesehen im entgegengesetzten Sinne, wie die Bewegung des Uhrzeigers zu nehmen.

Die Streifen verschwinden in vier um je 90° verschiedenen Stellungen. Dadurch dass man jedesmal, d. h. mit und ohne Zuckerlösung, in den vier Quadranten beobachtet und die Mittel nimmt, wird die Messung verfeinert.

Die etwaige Frage, ob der Drehungswinkel α grösser oder kleiner als 90° ist, kann durch eine ungefähre Bestimmung des specifischen Gewichtes der Lösung mit Hülfe von Tab. 3, oder auch dadurch entschieden werden, dass noch mit einer zweiten Röhre von anderer Länge beobachtet wird.

Die Instrumente haben häufig noch eine zweite Kreistheilung, welche bei Anwendung einer 200^{mm} langen Röhre direct den Gehalt von 1 Liter der Lösung an Grammen Zucker ergibt.

Wie das optische Drehungsvermögen anderer Substanzen mit den Apparaten von Mitscherlich oder Wild bestimmt wird, ist ohne Weiteres klar.

III. Saccharimeter von Soleil.

Dasselbe hat hinter der Röhre eine aus zwei Halbkreisen bestehende Doppelplatte von einem links und einem rechts drehenden Quarz. Zunächst zieht man das Ocular bei hintergesetzter gewöhnlicher Lampe so weit heraus, dass die Halbkreise scharf begrenzt erscheinen. Die saccharimetrische Einstellung findet immer auf gleiche Färbung der beiden Halbkreise statt, und zwar wird in der Regel die „empfindliche" Uebergangsfarbe von Blau in Roth gewählt. Um diese zu erhalten, stellt man mittels der Zahnstange am Ocular oder durch Drehung des hinteren Nicol'schen Prisma zunächst auf nahe gleiche Färbung der Halbkreise ein. Durch Drehung des vordersten Rohres im Ocular ist alsdann eine beliebige Färbung zu erreichen, wobei man diejenige wählt, welche den grössten Farbenunterschied der Halbkreise gibt.

Bei dem Soleil'schen Instrumente wird der getheilte Kreis durch Quarzkeile ersetzt, welche mittels eines Triebes verschoben werden können; die Grösse der Verschiebung wird an dem kleinen Maafsstab mit Index abgelesen. Es genügt hier zu bemerken, dass die Verschiebung um 1 Theilstrich einer Drehung des gelben Natronlichtes entspricht

bei den Pariser Instrumenten (Soleil-Duboscq)

um $0^0{,}217$

bei den Berliner Instrumenten (Soleil-Ventzke)

um $0^0{,}346$.

Der Zuckergehalt von 1 Cub. Cm. der Lösung in Grammen wird hiernach bei Anwendung einer 200^{mm} langen Röhre gefunden, wenn die Verschiebung am Maafsstabe von der leeren auf die gefüllte Röhre p Theilstriche betragen hat,

Soleil-Duboscq $z = 0{,}1635 . p$,
Soleil-Ventzke $z = 0{,}2605 . p$.

Für Zuckersorten, deren Gehalt an reinem Zucker gefunden werden soll, ergibt sich also die Regel: man löse 16,35 resp. 26,05 Gr. des Rohzuckers zu 100 Cub. Cm. Lösung, dann zeigt die Verschiebung des Maafsstabes den reinen Zuckergehalt in Procenten an.

Die Probe für richtige Theilung ist durch die Anwendung reiner „Normal-Lösung" von 16,35 resp. 26,05 Gr. in 100 Cub.

Cm. gegeben. Die Verschiebung muss dann 100 Theilstriche betragen.

Soll der Nullpunct der Theilung mit dem Zuckergehalt Null zusammenfallen, so stellt man bei leerer Röhre den Index auf Null und dreht am hinteren Nicol'schen Prisma, bis die Halbkreise gleich gefärbt sind.

Bestimmung des Zuckergehaltes, wenn noch andere drehende Substanzen vorhanden sind.

Die Elimination des Einflusses anderer drehender Substanzen als Rohrzucker (z. B. Invertzucker oder Dextrin) beruht auf der Erfahrung, dass der rechts drehende Rohrzucker durch 10 Minuten langes Erwärmen mit Salzsäure auf etwa 70° in links drehenden Invertzucker verwandelt wird. Eine invertirte Lösung von der Länge l Mm., welche in 1 Cub. Cm. z Gr. früheren Rohrzuckers enthält, dreht die Polarisationsebene des Natron-Lichtes bei der Temperatur t' um den Winkel

$$\alpha' = (0^{0},2933 - 0^{0},00336 . t') . z l.$$

Hieraus findet man leicht die praktische Regel: Nachdem der Drehungswinkel α der gewöhnlichen Lösung bestimmt worden ist, nimmt man 100 Cub. Cm. derselben, versetzt sie mit 10 Cub. Cm. concentrirter Salzsäure und erwärmt 10 Minuten lang auf 70°. Nach der Abkühlung füllt man mit dieser invertirten Lösung eine um den zehnten Theil längere Röhre als die erste, (oder wenn dieselbe Röhre benutzt wird, so multiplicirt man die jetzt zu beobachtenden Winkel mit 1,1) und beobachtet die nunmehr erfolgende Drehung α' nach links. Die Temperatur der Lösung bei dieser zweiten Beobachtung sei $= t'$. Dann berechnet man den Winkel

$$\frac{\alpha + \alpha'}{1,442 - 0,00506\, t'}$$

und erhält aus diesem den Zuckergehalt nach den obigen für das jeweilige Instrument gegebenen Vorschriften.

47. Winkelmessung mit Fernrohr, Spiegel und Scale.

Dieselbe wird, wenn auch nicht ausschliesslich, doch vorzugsweise bei magnetischen und galvanischen Beobachtungen

angewendet, auf welche wir uns desswegen beziehen. — Die Methode setzt voraus, dass die zu messenden Winkel klein sind.

Mit dem am Faden aufgehangenen Magnet u. s. w., dessen horizontale Drehung gemessen werden soll, ist ein verticaler Spiegel verbunden. Wir setzen voraus, dass der Spiegel in oder wenigstens nicht weit ausserhalb der Drehungsaxe liege, wodurch die Verhältnisse vereinfacht werden. In dem Spiegel wird mit einem Fernrohre eine horizontale, etwa in derselben Höhe wie der Spiegel befindliche, nach Umständen 1 bis 5 Meter von diesem entfernte Scale beobachtet. Die Scale wird so aufgestellt, dass in der Gleichgewichtslage des Magnetes, auf welche meistens die anderen Stellungen bezogen werden, nahezu der Punct, welchen ein vom Spiegel auf die Scale gefälltes Perpendikel trifft, in dem Fadenkreuz des Fernrohres erscheint. Wir nennen diesen Punct kurz den „mittleren Scalentheil", ebenso die Stellung des Magnets, in welcher dieser Scalentheil mit dem Fadenkreuz zusammenfällt, die „mittlere Stellung".

Einstellung von Fernrohr und Scale. Die erste Operation sei immer, dass man das Fernrohr durch Verschieben des Ocularrohres genähert auf die richtige Sehweite, d. h. auf die doppelte Entfernung der Scale vom Spiegel einstellt. Dann gibt man ihm, während das Rohr nach dem Spiegel gerichtet ist, diejenige Stellung, bei welcher das dicht über dem mittleren Scalentheil visirende Auge das Objectiv des Fernrohres, oder das neben dem Fernrohr visirende den mittleren Scalentheil im Spiegel sieht. Alsdann wird das Bild der Scale, wenn es nicht bereits im Gesichtsfelde des Fernrohres ist, durch eine kleine Drehung in demselben erscheinen. Schliesslich werden die feineren Einstellungen vorgenommen.

Zu den letzteren gehört das Deutlichsehen von Scale und Fadenkreuz. Zuerst wird das Fadenkreuz auf richtige Sehweite gestellt, dann das Ocularrohr verschoben, bis Scalentheile und Fadenkreuz keine Parallaxe zeigen d. h. sich bei dem seitlichen Bewegen des Auges vor dem Oculare nicht gegeneinander verschieben.

Wechseln bei den Ablesungen Beobachter von verschiedener Sehweite, so soll ein Jeder das deutliche Bild nur durch Verschieben des ersten, zwischen Auge und Fadenkreuz befindlichen Ocularglases hervorbringen.

Recept für die Versilberung des Glases (nach Böttger). 1) Man löst salpetersaures Silber in destillirtem Wasser, versetzt die Lösung mit Ammoniak, bis der entstandene Niederschlag beim Umrühren fast vollständig verschwindet, filtrirt die Lösung und verdünnt sie, so dass 1 Gramm salpetersaures Silber auf 100 Cub. Cm. der Lösung kommt. — 2) 2 Gr. salpetersaures Silber werden in etwas Wasser gelöst und in 1 Liter siedendes Wasser eingegossen. Dazu setzt man 1,66 Gr. Seignettesalz und lässt die Mischung kurze Zeit sieden, bis der entstandene Niederschlag grau aussieht. Die Lösung wird heiss filtrirt.

Die gut (mit Salpetersäure, Aetzkali, Alcohol) gereinigte Glasfläche wird in einem Gefäss mit einer einige Millimeter hohen Schicht aus gleichen Raumtheilen beider Lösungen bedeckt. Nach einer Stunde ist die Reduction beendigt, die Platte wird abgespült, die Operation erneuert u. s. f., bis die genügende Dicke der Silberschicht erreicht ist. Nach dem Trocknen kann man die Silberfläche mit dem Ballen der Hand vorsichtig poliren. Soll das Silber als Belegung auf der Rückfläche dienen, so ist das Poliren natürlich überflüssig. Man mag in diesem Falle die Operation auch beschleunigen, dadurch, dass man die zweite obiger Flüssigkeiten vor der Mischung auf etwa 70° erwärmt. Zum Schutz kann dann das Silber mit einem Firniss überzogen werden.

Die richtig bereiteten Flüssigkeiten erhalten sich an einem dunkelen Orte einige Monate lang brauchbar.

48. Reduction der Scalenbeobachtungen auf Bogen.

Wir wollen alle Drehungs-Winkel von der „mittleren“ Stellung (s. oben) als Nullpunct rechnen und unter Ausschlagswinkel φ den Winkel verstehen, um welchen der Magnet u. s. w. aus dieser Stellung gedreht ist. Scalenausschlag nennen wir die Differenz n des beobachteten vom mittleren Scalentheil.

1) Für kleine Ablenkungen ist der Ausschlagswinkel dem Scalenausschlag proportional. Und zwar, wenn r den Abstand der spiegelnden Fläche von der Scale, ausgedrückt in Scalentheilen (also Millimetern, wenn die Scale in Millimeter getheilt ist) bedeutet, so wird der Bogenwerth eines Scalentheiles gefunden

$$= \frac{28^0{,}648}{r} = \frac{1718'{,}9}{r} = \frac{103132''}{r}.$$

Bei erdmagnetischen Variationsbeobachtungen z. B. kann die Proportionalität immer angenommen werden.

Die Fehler können höchstens betragen

bei Ablenkungen bis zu	1^0	2^0	3^0	4^0	5^0
in Theilen des Ganzen	0,0004	0,0016	0,0036	0,0064	0,010.

2) Für eine Ablenkung bis zu 6^0 kann immer genügend genau gesetzt werden

$$\varphi = \frac{1718',9}{r} . n\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{n^2}{r^2}\right).$$

Oft will man nicht den Bogen, sondern eine trigonometrische Function kennen. Es ist

$$\text{tang } \varphi = \frac{n}{2r}\left[1 - \left(\frac{n}{2r}\right)^2\right]$$

$$\sin \varphi = \frac{n}{2r}\left[1 - \tfrac{3}{2}\left(\frac{n}{2r}\right)^2\right]$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{n}{4r}\left[1 - \tfrac{11}{2}\left(\frac{n}{4r}\right)^2\right].$$

Man reducirt hiernach einen Scalenausschlag n auf eine dem Bogen, der Tangente, dem Sinus, dem Sinus des halben Winkels proportionale Grösse, indem man resp. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, oder $\frac{11}{32} \cdot \frac{n^3}{r^2}$ von n abzieht.

3) Für beliebig grosse Ablenkungen ist

$$\varphi = \tfrac{1}{2} \text{ arc tang } \frac{n}{r}.$$

Die letztere Formel ergibt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung, die anderen wenn man in den Reihenentwicklungen für φ, tang φ u. s. w. nur die ersten beiden Glieder nimmt.

49. Bestimmung der Ruhelage einer schwingenden Magnetnadel.

Der Scalentheil, auf welchen die Magnetnadel sich einstellen würde, wenn sie in Ruhe wäre, ihre Ruhelage oder Gleichgewichtslage lässt sich durch Beobachten der bewegten Nadel auf folgende Weise ableiten.

1) Umkehrbeobachtungen. Sind die Schwingungen rasch oder gross, so beobachtet man einige auf einander folgende Umkehrpuncte des Fadenkreuzes auf der Scale. Aus je dreien findet sich die Ruhelage, indem das arithmetische Mittel aus

Nr. 1 und 3 mit Nr. 2 zum arithmetischen Mittel vereinigt wird. Vgl. übrigens die Vorschriften zur Bestimmung der Ruhelage einer Wage in (7), welche auf den jetzigen Fall ohne Weiteres übertragen werden können.

2) Standbeobachtungen. Wenn die Bewegung der Nadel so langsam ist, dass man in jedem Augenblick den Stand des Fadenkreuzes auf der Scale genau angeben kann, so gibt das arithmetische Mittel aus zwei beliebigen um die Zeit der Schwingungsdauer auseinanderliegenden Ablesungen die Ruhelage.

Als Beispiel mag ein Satz Beobachtungen aus einem magnetischen Termine dienen, nach den von Gauss gegebenen Vorschriften beobachtet und berechnet. Gesucht wurde der Stand einer Nadel von 20^{sec} Schwingungsdauer für 10^{h} 0^{m}. p ist die von 10 zu 10^{sec} gemachte Ablesung, p_0 das Mittel aus je zwei um 20^{sec} auseinanderliegenden p.

Zeit	p	p_0	
9^{h} 59^{m} 30^{sec}	475,0		
40	474,8	475,50	
50	476,0	5,95	Hauptmittel
10^{h} 0^{m} 0^{sec}	477,1	6,40	476,28
10	476,8	6,60	
20	476,1	6,95	
30	477,1		

3) Gedämpfter Magnet. Beide Regeln setzen eine langsame Abnahme der Schwingungsweite voraus. Ist aber der Magnet zur rascheren Beruhigung künstlich (durch Umgebung mit einem Kupferrahmen) gedämpft, so findet sich aus zwei um die Schwingungsdauer auseinanderliegenden Ablesungen p_1 und p_2 die Ruhelage p_0

$$p_0 = p_2 + \frac{p_1 - p_2}{1 + k}.$$

Hierin bedeutet k das Dämpfungsverhältniss, d. h. das Verhältniss eines Schwingungsbogens zu dem nächst folgenden. Vgl. das Beispiel im folg. Art. Die Correction der Scalentheile auf Bogen ist übrigens sehr selten nöthig.

Zur Beruhigung der Schwingungen bedient man sich häufig eines Magnets, welcher nach dem Gebrauch hinreichend entfernt in derselben Höhe wie die schwingende Nadel vertical aufgestellt wird. Auch ein in der Nähe der Nadel vorbeigeführter galvanischer Strom, den man im geeigneten Augenblicke schliesst und unterbricht, kann zum Beruhigen gebraucht werden.

50. Dämpfung und logarithmisches Decrement einer Magnetnadel.

Von grosser Bedeutung für magnetische und galvanische Messungen ist die Abnahme der Schwingungsbogen einer Magnetnadel, welche gedämpft, d. h. von einer Kupferhülse oder einem Multiplicator umgeben ist. Die Dämpfung entsteht durch die von der bewegten Nadel in dem Kupfer inducirten Ströme, und das Dämpfungsgesetz, welches sich aus der Theorie der Induction ergibt, sagt, dass die Bogen in geometrischer Reihe abnehmen. Das constante Verhältniss eines Schwingungsbogens zu dem darauf folgenden heisst Dämpfungsverhältniss, der Logarithmus des letzteren heisst das logarithmische Decrement der Nadel.

Die Beobachtung dieser Grösse geschieht einfach durch die Beobachtung einer Reihe von Umkehrpuncten der Nadel. Die Differenz zweier auf einander folgender Umkehrpuncte, bei grösseren Schwingungen nach (48) auf den Bogenwerth corrigirt, gibt den Bogen. Ist a_m die Grösse des m^{ten}, a_n des n^{ten} Bogens, so ist das Dämpfungsverhältniss

$$k = \left(\frac{a_m}{a_n}\right)^{\frac{1}{n-m}},$$

und das logarithmische Decrement

$$\lambda = \frac{\log a_m - \log a_n}{n - m}.$$

Beobachtungsfehler haben den geringsten Einfluss, wenn die beiden durch einander dividirten Bogen etwa im Verhältniss 3 stehen.

Aus einer grösseren Reihe (am besten einer ungeraden Zahl) von Beobachtungen kann man die gesuchte Grösse herleiten, wie im folgenden Beispiel gezeigt ist, in welchem 7 beobachtete Umkehrpuncte in der ersten Spalte enthalten sind. Die zweite Spalte enthält die Entfernung des Umkehrpunctes von dem mittleren Scalentheil (hier 500), die dritte und vierte die Correction, welche nach (48) die Scalenausschläge auf Grössen reducirt, die dem Bogen proportional sind. Die Entfernung der Scale vom Spiegel betrug nämlich $r = 2600$ Scalentheile. In Spalte 5 sind die sechs corrigirten Bogen enthalten, von denen dann wie unten angegeben die Combinationen 1 mit

4 u. s. f. je einen Werth für k oder λ ergeben. Hinter dem Verticalstrich ist gezeigt, wie man aus dem bekannten Dämpfungsverhältniss $k = 1{,}151$ aus je 2 Umkehrpuncten die Ruhelage der Nadel (**49**,3) berechnet.

Beispiel.

Beob. Umk.-Puncte.	n	$\frac{n^2}{3.2600^2}$	Corrig. Umk.-Puncte.	Bogen. a	$\frac{a}{2{,}151}$	Ruhelage.
285,0	215	0,5	285,5	424,0	197,1	512,4
710,0	210	0,5	709,5	368,1	171,1	512,5
341,2	159	0,2	341,4	320,9	149,2	513,1
662,5	162	0,2	662,3	278,3	129,4	513,4
383,9	116	0,1	384,0	241,6	112,3	513,3
625,7	126	0,1	625,6	210,0	97,6	513,2
415,6	84	0,0	415,6			
					Mittel =	513,09

Man erhält also

aus 1 und 4 $\lambda = \frac{1}{3}$ (log 424,0	— log 278,3)	= 0,0610
2 „ 5 „ 368,1	241,6	0,0609
3 „ 6 „ 320,9	210,0	0,0614
	Mittel λ =	0,0611.
	k =	1,151.

Ein Theil der Dämpfung rührt immer vom Luftwiderstand her. Wird die Dämpfung gesucht, welche ein Multiplicator allein geben würde, so stellt man einen Satz Beobachtungen bei geschlossener und einen bei unterbrochener Leitung an. Das logarithmische Decrement im letzteren von dem im ersteren Falle abgezogen gibt das gesuchte des Multiplicators allein. (**70**, III.)

51. Schwingungsdauer einer Magnetnadel.

Schwingungsdauer eines um eine Gleichgewichtslage oscillirenden Körpers nennen wir die Zeit, welche zwischen einer Elongation (Umkehr, grösster Entfernung von der Ruhelage) bis zur nächsten auf der anderen Seite verfliesst. Der Zeitpunct einer Umkehr ist zur directen Beobachtung ungeeignet, denn die Bewegung des Körpers ist gerade in diesem Augenblick unmerkbar. Dagegen passirt derselbe einen der Gleichgewichtslage nahe gelegenen Punct mit der grössten Geschwindigkeit, so dass die Zeit dieses Durchganges scharf zu beobachten ist. Aus zwei auf einander folgenden Durchgangszeiten durch denselben Punct (in entgegengesetzter Richtung) findet

sich der zwischenliegende Augenblick der Umkehr einfach als arithmetisches Mittel.

Man markirt also einen der Ruhelage des Magnets nahe liegenden Punct (an der Scale durch Ueberhängen eines hinreichend sichtbaren Fadens), beobachtet die Zeiten, in welchen dieser Punct passirt wird, nach dem Schlage einer Secundenuhr und nimmt zunächst aus je zwei solchen benachbarten Zeiten das Mittel. Die Zehntel Secunden schätzt man aus dem Verhältniss der Abstände des Fadens von der Marke bei dem dem Durchgang vorausgehenden und dem nachfolgenden Secundenschlage.

Berechnung der Schwingungsdauer. Würde man aus n so erhaltenen auf einander folgenden Schwingungsdauern wieder das Mittel nehmen, so erhielte man dasselbe Resultat, wie wenn man die Differenz der ersten von der letzten Umkehrzeit durch n dividirt. Die zwischenliegenden Beobachtungen wären also nutzlos. Um alle zu verwerthen kann man sie in zwei Hälften theilen, immer die Differenzen der entsprechenden Nummern aus beiden Hälften nehmen, aus diesen das arithmetische Mittel berechnen und dasselbe durch $\frac{1}{2}n$ dividiren.

Beispiel.

Durchgangszeit beob.		Umkehrzeit berechnet.	
m	sec	m	sec
10	3,3		
	16,5	10	9,90
	29,9		23,20
	43,0		36,45
	56,6		49,80
11	9,9	11	3,25
	23,3		16,60

Schwingungsdauer

aus Nr. 1 und 4 $\frac{39,90}{3} = 13,30$

2 und 5 $\frac{40,05}{3} = 13,35$

3 und 6 $\frac{40,15}{3} = 13,38$

Mittel = $13^{sec},34$

Am Vortheilhaftesten ist es, sich einige, durch mehrere Beobachtungen genau bestimmte, weit auseinanderliegende Umkehrzeiten auf folgende Weise zu verschaffen. Es wird zweimal (oder zur grösseren Sicherheit besser mehrmals) eine gerade Anzahl, z. B. sechs, auf einander folgende Durchgangszeiten durch den markirten Punct beobachtet. Dann nimmt man in jedem Beobachtungssatz aus je zwei symmetrisch gegen die mittelste Elongation gelegenen Zeiten das arithmetische Mittel und aus diesem wieder das Hauptmittel.

Beispiel.

	Erster Satz.		Zweiter Satz.	
Nr.	Durchgangs-zeit.	Mittel.	Durchgangs-zeit.	Mittel.
	m sec		m sec	
1.	4 10,6		9 25,5	
2.	29,0		43,9	
3.	45,6	*3.4.* $4^m54{,}80^{sec}$	10 0,6	$10^m9{,}75^{sec}$
4.	5 4,0	*2.5.* 54,85	18,9	9,75
5.	20,7	*1.6.* 54,75	35,6	9,70
6.	38,9		53,9	
Hauptmittel		$4^m54{,}80^{sec}$		$10^m9{,}73^{sec}$

Die beiden Hauptmittel sind die Zeitpuncte zweier Elongationen so genau als sie aus diesen Beobachtungen zu entnehmen sind. Ihr Unterschied = 314,93 Sec., dividirt durch die Anzahl der zwischen ihnen verflossenen Schwingungen gibt die Schwingungsdauer so genau als möglich. Es ist nun nicht nothwendig diese Schwingungen wirklich gezählt zu haben; man kann sie aus den Beobachtungen selbst ableiten. Nämlich ein Näherungswerth der Schwingungsdauer ist leicht aus einem der beiden Sätze, zum Beispiel dem ersten zu entnehmen. Aus den beiden ersten und den beiden letzten Beobachtungen desselben findet sich $4^m\,19^{sec},8$ und $5^m\,29^{sec},8$ als Zeitpuncte zweier Elongationen, zwischen denen 4 Schwingungen liegen. Danach würde die Schwingungsdauer $= \frac{70{,}0}{4} = 17{,}5$ Sec. sein. Wären dieser Werth und die Beobachtungen vollständig genau, so würde 17,5 dividirt in 314,93 die gesuchte Anzahl der Schwingungen sein. Bei der Ausführung der Division findet sich 17,996, welcher Werth so nahe an der ganzen Zahl 18 liegt, dass ohne Zweifel 18 Schwingungen in der Zeit 314,93 Sec. ausgeführt worden sind. Die Schwingungsdauer ist daher $\frac{314{,}93}{18} = 17{,}496$ Sec. (Wollte man annehmen, es wäre 17 oder 19 die Schwingungsanzahl, so käme die Dauer 18,52 resp. 16,57 heraus, was mit den einzelnen Beobachtungen durchaus unverträglich wäre.)

Um die Beobachtungsfehler zu eliminiren, macht man eine grössere gerade Anzahl $2m$ von Beobachtungssätzen, combinirt Nr. 1 mit $m+1$, 2 mit $m+2, \cdots m$ mit $2m$ und nimmt das Mittel der einzelnen Resultate. Liegen die Beobachtungssätze gleich weit auseinander, so lässt sich die Methode der kleinsten Quadrate gerade wie in (**37**) anwenden.

Das Verfahren setzt voraus, dass die Schwingungsdauer hinreichend gross ist, um die auf einander folgenden Durchgänge einzeln beobachten zu können. Doch steht nichts im Wege es auch auf kürzere Schwingungen anzuwenden, indem man immer zwei (allgemein eine gerade Anzahl) Durchgänge überspringt, z. B. aus den Durchgängen Nr. 1 4 7 10 13 16 den Satz von Beobachtungen bildet. Uebrigens rechnet man wie oben, nur wird natürlich das Resultat durch 3 dividirt. Auf die Bestimmung der Schwingungsanzahl muss natürlich eine um so grössere Vorsicht verwandt werden, je grösser dieselbe, also unter übrigens gleichen Umständen, je kürzer die Schwingungsdauer ist. Die Möglichkeit eines Irrthums wird dadurch verringert, dass man zu einem Durchgang bemerkt, ob er einer Bewegung nach kleineren oder grösseren Zahlen entspricht; oder auch dadurch, dass man sich gewöhnt immer mit einer bestimmten Richtung zu beginnen. Dann muss die Schwingungszahl nothwendig eine gerade sein.

Ob der Magnet mit Spiegel und Scale oder mit blossem Auge beobachtet wird, ist für die Methode natürlich gleichgültig.

Beträgt eine Schwingungsdauer sehr nahe eine Secunde oder ein ganzes Vielfaches derselben (Secundenpendel), so kann die Methode der Coincidenzen angewandt werden. Bei dieser werden die Zeiten notirt, zu denen ein Durchgang durch die Ruhelage genau mit einem Secundenschlage zusammenfällt. Die Schwingungsdauer wird sodann erhalten, indem man die Anzahl n der zwischen zwei solchen Augenblicken verflossenen Secunden durch $n+1$ oder durch $n-1$ dividirt, je nachdem die Durchgänge allmählich vor den Secundenschlag voraufgeeilt oder hinter demselben zurückgeblieben sind.

52. Reduction der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bogen.

Die Schwingungsdauer nimmt mit der Schwingungsweite um ein Weniges zu. Fast immer suchen wir den Grenzwerth, welchem sie sich annähert, wenn die Schwingungsweite sehr klein wird; wir müssen also, sobald die Schwingungen nicht

sehr klein waren, den durch Beobachtung gefundenen Werth auf den Grenzwerth corrigiren. Nennen wir

t die durch Beobachtung gefundene Schwingungsdauer,

α den ganzen Bogen, welchen der schwingende Magnet dabei beschrieb,

so ist die auf unendlich kleine Bogen reducirte Schwingungsdauer t_0

$$t_0 = t - \left(\tfrac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4} + \tfrac{5}{64}\sin^4\frac{\alpha}{4}\right) t.$$

Zur Erleichterung der Reduction findet sich in Tab. 21 der in Klammer befindliche Ausdruck bis zu Bogen von 40^0 berechnet, einer Grösse, über welche man niemals hinausgehen wird.

Dieselbe Correction gilt für ein durch die Schwere getriebenes Pendel, überhaupt für jeden Körper, bei welchem das Drehungsmoment, welches ihn in die Gleichgewichtslage zurücktreibt, dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist.

Die Beobachtung mit Fernrohr und Scale gewährt den Vortheil, dass die Schwingungen (etwa 50 bis 300 Scalentheile) stets so klein sind, dass der erste Theil des Correctionsgliedes genügt. Man kann dann setzen, wenn

p den Schwingungsbogen in Scalentheilen,

r den Scalenabstand in Scalentheilen bedeutet,

$$t_0 = t - \frac{t}{256} \cdot \frac{p^2}{r^2}.$$

Als den Werth von α oder p, welcher in obige Formeln eingesetzt wird, kann man das arithmetische Mittel aus den bei der ersten und der letzten Schwingung beschriebenen Bogen einsetzen. Doch richte man es dann so ein, dass die Abnahme der Schwingungsweite in der Zwischenzeit nicht mehr als etwa den dritten Theil des Anfangsbogens betragen habe. Nennen wir das arithmetische Mittel aus dem ersten und letzten Bogen a, ihre Differenz d, so ist es genauer und immer genügend, wenn man für α oder p einsetzt $a\left(1 - \frac{1}{24}\frac{d^2}{a^2}\right)$.

Die vollständige Formel für die Reduction der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bogen ist $t_0 = \dfrac{t}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{4}\cdots}$. Obige Formel

entsteht aus dieser durch Ausführung der Division und Weglassen der höheren Potenzen als die vierte, was praktisch immer erlaubt ist. Die Reductionsformel für die Scalenbeobachtungen wird mit Hülfe von (48) leicht gefunden.

53. Bestimmung eines Trägheitsmoments.

Das Trägheitsmoment eines materiellen Punctes bezogen auf eine Axe, um welche er sich dreht, ist $l^2.m$, unter m die Masse des Punctes unter l seinen Abstand von der Axe verstanden. Dasjenige einer Anzahl von fest mit einander verbundenen Puncten oder eines Körpers ist die Summe oder das Integral aller dieser Ausdrücke bezogen auf alle einzelnen Körperelemente. Es muss natürlich angegeben werden, nach welcher Einheit Länge und Masse gemessen sind. In dem absoluten elektrisch-magnetischen Maafssystem wird immer, sobald nichts Anderes bemerkt ist, als Längeneinheit das Millimeter, als Masseneinheit die Masse eines Milligrammes angenommen, was man durch ein der Zahl beigesetztes Mgr. Mm.^{2} bezeichnen kann.

I. Berechnung des Trägheitsmomentes. Dieselbe ist auf einen Körper von regelmässiger Gestalt und überall gleicher Dichtigkeit beschränkt. In den am häufigsten vorkommenden Fällen erhält man so folgende Ausdrücke:

m bedeute immer die Masse des Körpers,
K das gesuchte Trägheitsmoment.

Dünner Stab. Die Länge sei l, die Dicke überall gleich und gegen l sehr klein. Bezogen auf eine durch den Mittelpunct gehende zum Stabe senkrechte Axe ist

$$K = m.\frac{l^2}{12}.$$

Rechtwinkliges Parallelepipedum. a und b seien zwei Kanten desselben. Das Trägheitsmoment, bezogen auf eine durch den Schwerpunct (Mittelpunct) gehende zur dritten Kante parallele, also auf a und b senkrechte Axe ist

$$K = m.\frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Cylinder oder Kreisscheibe vom Halbmesser r. Es ist, bezogen auf die Axe des Cylinders,

$$K = m . \frac{r^2}{2} .$$

Bezogen auf eine zu der Axe senkrecht durch den Mittelpunct gezogene Gerade ist, wenn l die Länge des Cylinders

$$K = m . \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right) .$$

Hohlcylinder von r_0 innerem und r_1 äusserem Halbmesser. Trägheitsmoment bezogen auf die Axe

$$K = m . \frac{r_0^2 + r_1^2}{2} .$$

Kugel vom Halbmesser r. Bezogen auf einen Durchmesser ist

$$K = m . \tfrac{2}{5} r^2 .$$

Beispiel. Das Trägheitsmoment eines 88030^{mgr} schweren cylindrischen Magnetes von 100^{mm} Länge, 6^{mm} Halbmesser ist $= 88030 \left(\frac{100^2}{12} + \frac{6^2}{4} \right)$ $= 74150000$ Mgr. Mm.^{2}

Hülfssatz: Ist das Trägheitsmoment K eines Körpers in Beziehung auf eine durch seinen Schwerpunct gelegte Axe gegeben (wie in den vorigen Beispielen), so erhält man das auf eine beliebige andere, der ersteren parallele Axe bezogene Trägheitsmoment K', indem man zu K hinzufügt das Product aus der Masse des Körpers und der zweiten Potenz des Abstandes a des Schwerpunctes von der neuen Axe. Also

$$K' = K + a^2 m .$$

II. Bestimmung des Trägheitsmomentes auf empirischem Wege. Man beobachtet die Schwingungsdauer, vermehrt dann das Trägheitsmoment, ohne die drehenden Kräfte zu ändern, um eine bekannte Grösse und beobachtet die Schwingungsdauer wiederum. Wenn

t die Schwingungsdauer des Körpers allein,
k das hinzugefügte Trägheitsmoment,
t' die Schwingungsdauer nach Vermehrung des Trägheitsmoments

bedeutet, beide Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bogen

reducirt, (s. vor. Art.), so ist $t'^2 : t^2 = (K + k) : K$, also das gesuchte Trägheitsmoment des Körpers allein

$$K = k \frac{t^2}{t'^2 - t^2}.$$

Dieses Verfahren findet vorwiegend Anwendung bei Körpern, welche an einem Faden aufgehängt sich um denselben als verticale Axe drehen, also besonders bei Magneten. Ein bekanntes Trägheitsmoment fügt man diesen hinzu, indem man zwei gleiche cylindrische Gewichte mit Spitzen oder an Fäden in gleichen horizontalen Abständen von der Drehungsaxe (dem Aufhängungsfaden) an dem Körper aufhängt, so dass die Axe der Cylinder vertical hängt. Die drehenden Kräfte werden durch die Gewichte nicht geändert, weil nur horizontale Kräfte in Betracht kommen. Nach dem Vorausgeschickten ist das Trägheitsmoment dieser Cylinder zusammengenommen

$$k = m\,(l^2 + \tfrac{1}{2} r^2)$$

wo m die Masse beider zusammengenommen,

l den horizontalen Abstand der Aufhängepuncte (Spitzen oder Fäden) der Gewichte von der Drehungsaxe des Magnets,

r den Halbmesser der Cylinder bedeutet.

Man bestimmt l durch Messung des Abstandes der beiden Aufhängepuncte der Gewichte von einander, als die Hälfte dieses Abstandes.

Beispiel. Die beiden cylindrischen Gewichte haben einen Durchmesser $= 10^{mm}$, $r = 5$.
Sie wiegen zusammen 50 gr., $m = 50000$.
Der Abstand der Coconfäden, mit denen sie am Magnet aufgehängt sind, von einander ist gemessen $= 100{,}26^{mm}$, $l = 50{,}13$.
anach berechnet sich ihr Trägheitsmoment zusammengenommen

$$k = 50000\,(50{,}13^2 + \tfrac{25}{2}) = 126280000 \text{ Mgr. Mm}^2.$$

Ferner seien die Schwingungsdauern gefunden

1) des unbelasteten Magnets gleich 9,754 Sec. bei einem mittleren Schwingungsbogen von $18^0{,}9$; so ist (vor. Art.)

$$t = 9{,}754\,(1 - 0{,}00170) = 9{,}737.$$

2) des mit obigen Gewichten belasteten Magnetes gleich 14,311 Sec. bei $25^0{,}5$ Bogen; so ist $t' = 14{,}311\,(1 - 0{,}00310) = 14{,}267$.

Folglich das gesuchte Trägheitsmoment des Magnetes

$$K = k \frac{t^2}{t'^2 - t^2} = 126280000 . \frac{9{,}737^2}{14{,}267^2 - 9{,}737^2} = 110110000 \text{ Mgr. Mm}^2.$$

54. Torsionsverhältniss eines aufgehangenen Magnets.

Zum Zwecke absoluter Messungen ist es nothwendig, die von der Elasticität des Aufhängefadens eines Magnetes herrührenden drehenden Kräfte von den erdmagnetischen zu trennen. Das Drehungsmoment des Fadens ist proportional dem ihm mitgetheilten Torsionswinkel. Das erdmagnetische Drehungsmoment ist proportional dem Sinus des Winkels, um welchen der Magnet aus dem magnetischen Meridian abgelenkt ist; wir können es aber mit grosser Annäherung dem Winkel selbst proportional setzen, solange derselbe klein ist. Unter dieser Voraussetzung also steht für denselben Winkel das Drehungsmoment der Torsion zu dem erdmagnetischen Drehungsmoment in einem bestimmten Verhältnisse, welches wir das Torsionsverhältniss nennen wollen. Dasselbe wird auf folgende Weise bestimmt.

Man beobachtet die Stellung des Magnets bei ungedrehetem Faden. Alsdann wird dem Faden durch Drehen des oberen oder unteren Befestigungspunctes eine gemessene Torsion mitgetheilt und die Einstellung des Magnetes wiederum beobachtet. Ist

α der Winkel, um welchen der Faden gedrillt worden ist,
φ der Winkel, um welchen der Magnet dadurch abgelenkt wird,

so ist das gesuchte Torsionsverhältniss Θ

$$\Theta = \frac{\varphi}{\alpha - \varphi}.$$

Bei Instrumenten zu feinerer Messung ist der Aufhängefaden entweder oben oder unten an einem Torsionskreis befestigt. Durch Drehung desselben wird die Torsion hervorgebracht; die Grösse des an der Theilung des Torsionskreises abgelesenen Drehungswinkels ist α. In Ermangelung eines Torsionskreises dreht man den Magnet einmal ganz herum, ohne an der oberen Befestigung etwas zu ändern; dann ist $\alpha = 360^0$.

Für die Genauigkeit der Bestimmung ist es wünschenswerth, dieselbe mit Spiegel und Scale auszuführen (47), was meistens durch Anbringen eines kleinen Spiegels leicht ge-

schehen kann, falls der Magnet nicht ohnehin damit versehen ist. Wird der Torsionswinkel nach Graden gemessen, so ist natürlich der Drehungswinkel des Magnets ebenfalls in Graden auszudrücken.

55. Erdmagnetische Inclination.

Inclination ist der Winkel, welchen die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit der Horizontalen bildet. Diese Richtung würde durch eine Magnetnadel angegeben werden, welche um eine, zum magnetischen Meridian und zur Nadel senkrechte Drehungsaxe ohne Reibung drehbar ist, wenn 1) die Drehungsaxe durch den Schwerpunct geht und 2) die magnetische Axe der Nadel (Verbindungslinie der Pole) mit ihrer geometrischen zusammenfällt. Die Unmöglichkeit, diese beiden Eigenschaften dauernd zu erfüllen, verlangt das nachher vorgeschriebene Beobachtungsverfahren.

Die Orientirung des getheilten Kreises in den magnetischen Meridian geschieht mit Hülfe einer gewöhnlichen Bussolennadel, wobei eine Genauigkeit von 1 bis 2^0 ausreichend ist.

Die Bezifferung der Kreistheilung variirt bei verschiedenen Instrumenten. Am bequemsten ist es, wenn in dem Quadranten der Nadelspitzen die Bezifferung immer von dem horizontalen Theilstriche als Nullpunct abwärts geht, was wir um der Einfachheit willen im Folgenden voraussetzen. Bei einem Inclinatorium mit drehbarem Kreise wäre die Bezifferung also in jedem Quadranten von dem horizontalen Theilstriche als Nullpunct zu beginnen.

Die Verticalstellung des Kreises wird an Inclinatorien mit feststehendem Kreise durch ein von dem obersten Theilstriche 90 herabhängendes Senkel, an den besseren Instrumenten mit drehbarem Kreise aber daran erkannt, dass die Blase einer Wasserwage in jeder Stellung des Kreises dieselbe Lage unter der Glasoberfläche der Wasserwage einnimmt.

Bei jeder Nadelstellung wird immer (um eine etwaige Excentricität der Nadelaxe gegen den Kreis zu eliminiren) die obere und die untere Spitze abgelesen. Das Mittel aus beiden Ablesungen wird im Folgenden unter beobachtetem Winkel kurzweg verstanden.

Nun verlangt die etwaige seitliche Verschiebung des Schwerpuncts ein Umlegen der Nadel (bei drehbarem Kreise eine Drehung des Kreises mit der Nadel um 180⁰), wodurch zugleich die Abweichung der geometrischen von der magnetischen Axe der Nadel herausfällt (und bei drehbarem Kreise eine Abweichung der Verbindungslinie des oberen und untern Theilstriches 90 von der Drehungsaxe des Instrumentes). Die etwaige Längsverschiebung des Schwerpunctes verlangt ein Ummagnetisiren der Nadel.

Es werde also beobachtet der Winkel

1) φ_1 bei irgend einer Auflegung der Nadel.

2) ψ_1, nachdem die Nadel um ihre magnetische Axe um 180^0 gedreht und wieder aufgelegt worden ist; oder bei drehbarem Kreise, nachdem letzterer mit der Nadel um 180^0 gedreht worden ist.

3) φ_2, nachdem die Nadel durch Streichen mit einem Magnet ummagnetisirt worden ist, in der Lage 1.

4) ψ_2, nachdem die ummagnetisirte Nadel wie oben in die Lage 2 umgelegt, resp. nachdem der Kreis um 180^0 gedreht worden ist.

I. Sind die vier Winkel nahe gleich, so ist die Inclination i das arithmetische Mittel

$$i = \frac{\varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2}{4}.$$

II. Jedenfalls kann man durch seitliches Abschleifen der Nadel vor der Messung leicht bewirken, dass φ_1 und ψ_1, sowie dass φ_2 und ψ_2 unter sich nahezu gleich sind, dann ist

$$\operatorname{tang} i = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi_1 + \psi_1}{2} + \operatorname{tang}\frac{\varphi_2 + \psi_2}{2}\right).$$

III. Sollten aber auch φ_1 und ψ_1 um einen grösseren Betrag von einander abweichen, so setze man

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \psi_1)$$
$$\operatorname{cotg} \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{cotg} \varphi_2 + \operatorname{cotg} \psi_2),$$

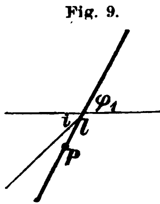
und rechne endlich

$$\operatorname{tang} i = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tang} \alpha_1 + \operatorname{tang} \alpha_2).$$

Dass durch das Umlegen eine Abweichung der magnetischen von der geometrischen Axe der Nadel eliminirt wird, sieht man ohne Weiteres. Die Formel I bedarf auch keines Beweises. Formel II und III ergeben

sich, wenn man die unbekannte Verschiebung des Schwerpunctes in ihre Componenten parallel und senkrecht zur magnetischen Axe zerlegt denkt und nun die Bedingungen des Gleichgewichts der magnetischen und der Schwerkräfte aufstellt. Wäre z. B. nur eine Längsverschiebung des Schwerpunctes um die Grösse l nach dem Nordende der Nadel vorhanden und dabei der Winkel φ_1 beobachtet, so ist, wenn wir das Gewicht der Nadel durch p bezeichnen, ihr magnetisches Moment durch M, und durch T die ganze Intensität des Erdmagnetismus (58 und Anhang),

Fig. 9.



$$pl \cos \varphi_1 = MT \sin (\varphi_1 - i).$$

Wird nun ummagnetisirt, so dass die Verschiebung l des Schwerpunctes nach dem Südende gerichtet ist, so ist ebenso

$$pl \cos \varphi_2 = MT \sin (i - \varphi_2).$$

Die kreuzweise Multiplication beider Gleichungen und die Auflösung der Sinus gibt, wenn durch $\cos i \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$ dividirt wird,

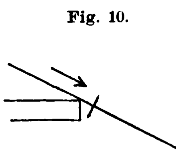
$$\text{tang}\, i - \text{tang}\, \varphi_2 = \text{tang}\, \varphi_1 - \text{tang}\, i,$$

oder (II) $$\text{tang}\, i = \tfrac{1}{2} (\text{tang}\, \varphi_1 + \text{tang}\, \varphi_2).$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass das magnetische Moment der Nadel vor und nach dem Umstreichen derselben gleich ist, was bei sorgfältig gleichem Streichen einer dünnen oft ummagnetisirten Nadel sehr nahe vorausgesetzt werden kann. Es ist gut, eine Nadel, welche längere Zeit im einen Sinne magnetisirt war, zu Anfang einigemal umzumagnetisiren. Man streiche ferner vor den Beobachtungen φ_1 und φ_2 genau in gleicher Weise nur mit umgekehrten Polen des Streichmagnets.

Das Streichen selbst geschieht etwa folgendermassen: man fasst die Nadel auf der einen Seite in der Nähe der Drehungsaxe mit den Fingern, setzt die andere Seite an den Pol des Magnetes und führt die Nadel bis über das Ende an dem Pole entlang, etwa wie in beistehender Figur. So mögen z. B. beide Flächen des einen Ende je zweimal, dann die des anderen je viermal und endlich die des ersteren noch zweimal gestrichen werden.

Fig. 10.



(Die Inclinationsbestimmung mit dem Erdinductor s. 77.)

56. Erdmagnetische Declination.

Unter Declination versteht man den Winkel des magnetischen mit dem astronomischen Meridian; um die Richtung der Abweichung festzustellen, zählt man im Norden von letzterem zu ersterem. Bei uns ist also die Declination „westlich". Die Unbekanntschaft mit der magnetischen Axe eines Magnetes verlangt, dass zum Zwecke einer genauen Declinationsbestimmung die Magnetnadel in zwei Lagen beobachtet wird.

Zur Bestimmung (nach Gauss) gehört ein Theodolith mit Horizontalkreis, eine entfernte (oder, wenn nahe, im Brennpuncte einer vorgesetzten Linse befindliche) Marke, deren astronomisches Azimuth, d. h. Horizontal-Winkel der nach ihr gezogenen geraden Linie mit dem astronomischen Meridian, vom Theodolith aus bekannt ist; endlich ein Magnetometer, dessen Magnet sich um 180° um sich selbst umlegen lässt. Der Theodolith befindet sich mit dem Aufhängefaden des Magnetes nahezu im gleichen magnetischen Meridian, und sein Fernrohr in gleicher Höhe wie der Magnet.

Wir setzen als das Bequemste voraus, dass der Magnet eine Längsdurchsicht hat, an dem dem Theodolithen zugewandten Ende mit einer Linse von einer Brennweite gleich der Länge des Magnetes geschlossen. Am anderen Ende befindet sich eine Marke (Blende mit kleiner Oeffnung, Fadenkreuz oder Glastheilung), welche also durch die Linse gesehen als ein sehr fernes Object erscheint.

Der Theodolith sei in der Richtung getheilt, dass bei einer Drehung des Fernrohres in gleichem Sinne wie die tägliche Bewegung der Sonne die Ziffern der Kreistheilung wachsen.

Die Beobachtungen, nachdem die Drehungsaxe des Theodolithen mit der Libelle vertical gemacht ist, sind die folgenden.

1) Man richtet das Fernrohr so, dass die terrestrische Marke im Fadenkreuz erscheint. Die Kreisablesung hierbei sei $= \alpha$. Ist A das astronomische Azimuth der Marke, von Norden nach Westen gezählt (siehe oben), so müsste der Theodolith auf den Theilstrich $\alpha + A$ gestellt werden, damit die Visirlinie des Fernrohrs nach Norden gerichtet wäre.

2) Man richtet das Fernrohr auf die Marke im Magnet; die Kreisablesung sei α_1.

3) Man dreht den Magnet um 180° um sich selbst, so dass die vorher untere Seite die obere wird und stellt wieder auf seine Marke ein. Die Kreisablesung sei α_2. Die Ablesungen α_1 und α_2 weichen immer nur wenig von einander ab.

Nun würde offenbar

$$\delta' = \alpha + A - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

die westliche Declination sein, wenn der Faden kein Torsionsmoment ausübte. Um letzteres zu bestimmen und zu eliminiren, muss der Winkel bestimmt werden, um welchen der Faden bei der Beobachtung gedrillt war. Zu diesem Zweck wird der Magnet aus seinem Schiffchen herausgenommen, durch einen unmagnetischen Stab von ungefähr gleichem Gewicht ersetzt und die Drehung des Schiffchens hierbei über einem untergelegten Theilkreis beobachtet. Beträgt der Drehungswinkel, in dem Sinne der täglichen Sonnenbewegung positiv gerechnet, φ, so ist die Declination

$$\delta = \delta' + \Theta\varphi,$$

unter Θ das Torsionsverhältniss (54) verstanden.

Den kleinsten Werth des Torsionsverhältnisses bei gleicher Tragkraft gibt der Coconfaden. Doch ist die Torsionsruhelage bei ihm sehr veränderlich und bei einem Bündel von Fäden vom angehängten Gewicht abhängig. Ausserdem wird bei kleinem Torsionsmoment die Beobachtung des Torsionswinkels ungenau und zeitraubend, so dass ein Metalldraht (dünner Eisen- oder Messingdraht) für nicht zu kleine Magnete den Vorzug verdient.

57. Geodätische Bestimmungen mit der Bussole.

Die 23te Tabelle enthält für die geographischen Längen und Breiten des mittleren Europa die Winkel, um welche die Magnetnadel vom astronomischen Meridiane abweicht. Die hieraus entnommenen Declinationen werden im Freien von den wirklichen selten um $1/4$ Grad abweichen. Diese Möglichkeit, eine astronomische Richtung durch die Magnetnadel einfach festzulegen, wird bei geodätischen Bestimmungen, die nur auf mässige Genauigkeit Anspruch machen, in mannichfacher Form ausgebeutet.

Für den Gebrauch der betreffenden Instrumente, auf welche wir nicht näher eingehen, gelten die allgemeinen Vorschriften für Winkelmessinstrumente. Die Genauigkeit hängt hauptsächlich von der Länge der Bussolennadel ab, denn je kürzer diese, desto grösser ist die mögliche Abweichung der magnetischen von der geometrischen Axe der Nadel.

Den Einfluss der Reibung auf der Spitze verringert man durch geringe Erschütterungen der Bussole vor der Ablesung der Nadel. Dass immer beide Spitzen der Nadel beobachtet werden, ist selbstverständlich.

58. Bestimmung der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus. Methode von Gauss.

Die Ausführung dieser wichtigen Messung besteht immer aus zwei Theilen, nämlich aus einer Schwingungsdauer- und einer Ablenkungsbeobachtung. Erstere gibt das Product MT der horizontalen Intensität T des Erdmagnetismus in den Stabmagnetismus (das magnetische Moment) M des schwingenden Magnets, wenn dessen Trägheitsmoment bekannt ist. Das Verhältniss $\frac{M}{T}$ wird gefunden, indem man die Ablenkung einer Magnetnadel beobachtet, welche durch den vorigen Magnet aus gemessener Entfernung hervorgebracht wird. Aus beiden Zahlen wird sodann durch Division M eliminirt und T bestimmt.

Von vorn herein ist zu bemerken, dass alle Zeiten nach Secunden, die Längen nach Millimetern, die Massen nach Milligrammen gerechnet werden.

I. Bestimmung von MT.

Man hängt den Magnet, die magnetische Axe horizontal, an einem Faden auf und beobachtet die Schwingungsdauer. Bedeutet

t diese auf unendlich kleine Bogen reducirte Schwingungsdauer in Secunden (51. 52),

K das Trägheitsmoment des Magnets (53),

Θ das Torsionsverhältniss des Fadens (54),

so ist das gesuchte Product $M.T$

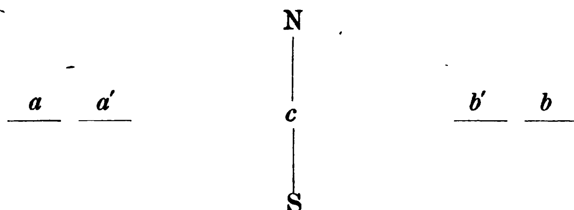
$$M.T = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\Theta)}.$$

Die nach dem letzteren Ausdruck aus den Beobachtungen erhaltene Zahl wollen wir mit A bezeichnen.

Zum Aufhängen kleinerer Stäbe wählt man der geringen Torsionskraft wegen immer den Coconfaden, eventuell ein Bündel von solchen Fäden. Ein solches wird verfertigt, indem man zwei Glasstäbe in einem Abstande gleich der gewünschten Länge des Fadens an der Tischkante befestigt und den Faden um dieselben herumführt. Schliesslich werden die Enden aneinander geknüpft, dann die Stäbe ein wenig auseinander geführt, so dass der Faden gespannt ist, und die so entstandenen Schleifen in passender Weise an den Suspensionen befestigt. Auf jeden einzelnen Coconfaden mag man ohne Gefahr des Reissens etwa 15 gr. Belastung rechnen. Stäbe vom Gewicht 1 Pfund und mehr können an Metalldrähten (am besten Stahl) aufgehängt werden. Vgl. S. 144 unten.

II. Bestimmung von $\frac{M}{T}$.

Indem man den obigen Magnetstab, dessen magnetisches Moment wir M genannt haben, aus zwei mal zwei gleichen gemessenen Entfernungen auf eine horizontal drehbare Magnetnadel wirken lässt, und jedesmal den Winkel beobachtet, um welchen letztere hierbei abgelenkt wird, erhält man das Verhältniss des Stabmagnetismus M zum horizontalen Erdmagnetismus nach folgenden Regeln. c ist der Mittelpunct der Bussole.



Die Linie NS bezeichne den magnetischen Meridian, d. h. die Richtung, in welche sich die freie Nadel einstellt. Der Ablenkungsstab wird in der gezeichneten Lage östlich oder westlich von der Nadel in der Höhe der letzteren hingelegt, so dass sein Mittelpunct successive in a, a', b', b zu liegen kommt. Die Abstände des Mittelpunctes des Magnets vom Centrum der Bussole sind paarweise gleich, $ac = bc$, $a'c = b'c$.

Der Stab befinde sich beispielsweise in a, mit seinem

Nordpol westlich. 1) Man liest die Einstellung der Nadel an beiden Spitzen ab. 2) Dann vertausche man die Pole des Stabes, indem man ihn um 180° dreht, aber so, dass sein Mittelpunct wiederum in a zu liegen kommt, und lese die beiden Spitzen der nach der anderen Seite abgelenkten Nadel ab. 3) Man nehme von den Unterschieden der beiden Einstellungen jeder Spitze die Hälfte und aus beiden Hälften das arithmetische Mittel. Dieses ist der zur Stellung a gehörige Ablenkungswinkel.

Vorausgesetzt ist hierbei als das Bequemste, dass die Theilung der Bussole in einer Richtung von 0 bis 360 gezählt ist. Wird etwa von zwei Nullpuncten nach beiden Seiten gezählt, so muss natürlich anstatt der halben Differenz der Ablesungen ihre halbe Summe genommen werden.

Gerade so wird für die Stellungen a', b' und b verfahren.

Nun nimmt man aus den jedenfalls sehr nahe gleichen Winkeln für a und b und denen für a' und b' die arithmetischen Mittel. (Jedes entsteht also aus 8 einzelnen Ablesungen.) Nennen wir

φ den mittleren Ablenkungswinkel für a und b,
φ' denjenigen für a' und b',
r die halbe Länge ab in Millimetern,
r' „ „ „ $a'b'$ „ „ ,

so ist die gesuchte Grösse

$$\frac{M}{T} = \frac{1}{2}\,\frac{r^5 \operatorname{tang}\varphi - r'^5 \operatorname{tang}\varphi'}{r^2 - r'^2}.$$

Die so entstehende Zahl mit B bezeichnet, ergibt sich also die gesuchte Intensität T, indem man $MT = A$ durch $\frac{M}{T} = B$ dividirt und die Wurzel auszieht,

$$T = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Beweis für eine kurze Nadel. Befindet sich in der Fortsetzung der magnetischen Axe eines von Westen nach Osten gelegten Magnets vom magnetischen Moment M eine kurze Nadel im Abstand r von der Mitte des Magnets, welche um den Winkel φ abgelenkt wird, so ist (vgl. den Anhang) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{r^3}\frac{M}{T}\left(1 + \frac{a}{r^2}\right)$, wo a für jeden Magnet eine Constante ist. Wird aus einem zweiten Abstand r' die Ablenkung φ' beob-

achtet, so ist ebenso $\operatorname{tg}\varphi' = \frac{2}{r'^3}\frac{M}{T}\left(1 + \frac{a}{r'^2}\right)$. Durch Multiplication der oberen Gleichung mit r^5, der unteren mit r'^5 und Subtraction fällt die Unbekannte a heraus und es kommt $r^5 \operatorname{tg}\varphi - r'^5 \operatorname{tg}\varphi' = 2\frac{M}{T}(r^2 - r'^2)$.

Beispiel s. unten.

Man kann $\frac{M}{T}$ auch durch Ablenkungsbeobachtungen nach dem in nebenstehender Figur gezeichneten Schema erhalten, indem nämlich der Ablenkungsstab nördlich resp. südlich von der Bussole c in je zwei paarweise gleichen Entfernungen hingelegt wird. Im Einzelnen wird genau das vorhin beschriebene Verfahren befolgt, sowohl was die Beobachtungen als was die Berechnung der Mittelwerthe betrifft. Bedienen wir uns auch derselben Bezeichnungen für die Abstände des Mittelpunctes des Ablenkungsstabes, indem wir $r = \frac{1}{2}\,ab$, $r' = \frac{1}{2}\,a'b'$ setzen, ferner φ und φ' die mittleren Ablenkungswinkel für die Stellungen a, b und a', b' nennen, so ist in obigem Ausdruck nur der Factor $\frac{1}{2}$ wegzulassen, also hier

a ——
a' ——
· c
b' ——
b ——

$$\frac{M}{T} = \frac{r^5 \tang \varphi - r'^5 \tang \varphi'}{r^2 - r'^2}.$$

Die oben vorgeschriebene Anordnung der Beobachtungen erreicht folgende Zwecke. Dadurch dass der Ablenkungswinkel für beide Spitzen der Nadel beobachtet und das Mittel genommen wird, verschwindet der Einfluss einer etwaigen excentrischen Lage der Drehungsaxe gegen die Theilung der Bussole. Die Umkehrung des Stabes hat den Zweck, eine etwaige unsymmetrische Magnetisirung des Ablenkungsstabes zu eliminiren. Für die Magnetnadel endlich geschieht letzteres durch Hervorbringen der Ablenkungen von beiden Seiten. Selbstverständlich wird hierbei zugleich die Genauigkeit des Resultates in demselben Maafse vergrössert, wie durch die achtmalige Wiederholung einer einzelnen Ablesung.

Für einen möglichst geringen Einfluss der Beobachtungsfehler auf das Resultat ist am günstigsten, das Verhältniss der beiden Entfernungen $r : r' = 4 : 3$ zu wählen. — Ausserdem seien natürlich die Ablenkungswinkel möglichst gross. Jedoch darf man nicht zu diesem Zwecke mit der Annäherung

des Stabes an die Nadel weiter gehen, als bis die kleinere Entfernung $a'b'$ etwa das Sechsfache der Stablänge ist. Die Länge der Bussolennadel betrage wenn möglich nicht mehr als den 20ten Theil von $a'b'$.

Vereinfachung bei wiederholter Benutzung derselben Magnete. Die Ablenkung aus zwei verschiedenen Entfernungen ist nothwendig, um die unbekannte Vertheiluug des Magnetismus von Stab und Nadel zu eliminiren, was eben durch obige Formel geschieht. Wird derselbe Stab und dieselbe Nadel wiederholt zur Bestimmung von T benutzt, so lässt sich Beobachtung und Rechnung vereinfachen. Es genügt nämlich, die Beobachtung aus zwei Entfernungen ein einziges Mal angestellt zu haben. Aus diesen Beobachtungen berechnet man ein für allemal den Ausdruck

$$\varkappa = r^2 r'^2 \frac{r'^3 \operatorname{tang} \varphi' - r^3 \operatorname{tang} \varphi}{r^5 \operatorname{tang} \varphi - r'^5 \operatorname{tang} \varphi'} .$$

Wenn sodann für eine beliebige Entfernung R der Ablenkungswinkel Φ gefunden ist, so hat man einfach

$$\frac{M}{T} = \frac{1}{2} \frac{R^3 \operatorname{tang} \Phi}{1 + \frac{\varkappa}{R^2}},$$

resp. ohne den Factor $\frac{1}{2}$ bei der zweiten Anordnung (v. S.).

Werden die Ablenkungen nicht an einer Bussole sondern an einem Magnetometer mit Spiegel und Scale (47) gemessen, so verfährt man (bis auf die Ablesungen an zwei Spitzen) ganz wie oben. Die Scalentheile werden nach (48) in Bogen verwandelt. Nur muss die Torsion des Aufhängefadens in Rechnung gezogen werden, was durch Multiplication der Tangenten mit $1 + \vartheta$ geschieht, wo ϑ das Torsionsverhältniss (54) für den abgelenkten Stab bedeutet. Es ist also zu berechnen

$$\frac{r^5 \operatorname{tang} \varphi - r'^5 \operatorname{tang} \varphi'}{r^2 - r'^2} (1 + \vartheta).$$

Die Ablenkungs- und die Schwingungsbeobachtungen sind natürlich an demselben Orte auszuführen. Dass aus dessen Nähe eiserne Gegenstände, welche einen Localeinfluss ausüben können, zu entfernen sind (insbesondere auch aus den Taschen des Beobachters, sowie etwaige Stahlbrille), ist selbstverständlich. — Um Variationen des Erdmagnetismus und des Stabmagnetismus, letztere besonders durch Temperaturänderung, möglichst auszuschliessen, werden beide Sätze von Beobachtungen thunlich rasch hintereinander ausgeführt.

Beispiel. Messung von T mit dem Weber'schen transportablen Magnetometer.

1. Bestimmung von MT.

Trägheitsmoment. Der Magnetstab bestand aus einem rechtwinkligen Parallelepipedum von der Länge $a = 100^{mm}$ und der Breite $b = 12{,}5^{mm}$. Sein Gewicht betrug $m = 119860^{mgr}$. Nach (53) S. 124 folgt hieraus das Trägheitsmoment

$$K = 119860 . \frac{100^2 + 12{,}5^2}{12} = 101440000.$$

Torsionsverhältniss des Fadens. Es wurde gefunden, dass eine einmalige ganze Umdrehung des Aufhängefadens eine Drehung des Magnetes um $1^0{,}4$ hervorbrachte. Nach (54) ist hiernach das Torsionsverhältniss

$$\Theta = \frac{1{,}4}{360 - 1{,}4} = 0{,}0039.$$

Schwingungsdauer. Dieselbe wurde (51) beobachtet $= 7{,}414^{sec}$, wobei der Schwingungsbogen im Mittel 30^0 betrug. Hiernach ist die auf unendlich kleine Schwingungen reducirte Schwingungsdauer (52)

$$t = 7{,}414 - 7{,}414 . 0{,}0043 = 7{,}382^{sec}.$$

Berechnung von MT. Der gesuchte Werth ist (S. 133)

$$MT = \frac{\pi^2 . K}{t^2 (1 + \Theta)} = \frac{3{,}1416^2 . 101440000}{7{,}382^2 . 1{,}0039} = 18301000.$$

2. Bestimmung von $\frac{M}{T}$.

Eine Bussole stand auf dem Theilstrich 500 eines in Mm. getheilten, senkrecht zur Nadel gerichteten Maafsstabes. Der vorige Magnet wurde successive mit seinem Mittelpunct auf die Theilstriche 100, 200, 800, 900 gelegt, und zwar in jeder Stellung einmal so, dass der Nordpol, das andere Mal so, dass der Südpol nach der Bussole gerichtet war. S. d. Fig. S. 134. Dabei wurden folgende Beobachtungen der Nadel gemacht. Als z. B. der Magnet auf 100 lag, wurde abgelesen

	1. Spitze	2. Spitze
N. Pol zugewandt	$99^0{,}4$	$279^0{,}8$
S. Pol zugewandt	$79^0{,}9$	$260^0{,}6$
Halbe Differenz	$= 9^0{,}75$	$9^0{,}60$
Mittel	$=$ $9^0{,}675$.	

Gerade so wurde gefunden, als der Mittelpunct des Magnets lag

auf 200^{mm}	$22^0{,}41$
auf 800^{mm}	$22^0{,}67$
auf 900^{mm}	$9^0{,}865$.

Die beiden S. 135 mit φ und φ' bezeichneten Ablenkungswinkel sind also die paarweise erhaltenen Mittelwerthe

$$\varphi = 9^0{,}77 = 9^0 46' \qquad \varphi' = 22^0{,}54 = 22^0 32'.$$

Die beiden Entfernungen r und r' finden sich

$$r = \frac{1}{2}(900 - 100) = 400^{mm}, \qquad r' = \frac{1}{2}(800 - 200) = 300^{mm}.$$

Hieraus wird nun berechnet nach S. 135

$$\frac{M}{T} = \frac{1}{2} \frac{400^5 . \operatorname{tang} 9^0 46' - 300^5 . \operatorname{tang} 22^0 32'}{400^2 - 300^2} = 5387800.$$

Die gesuchte horizontale Intensität des Erdmagnetismus ist hiernach

$$T = \sqrt{\frac{18301000}{5387800}} = 1{,}843.$$

Der Ausdruck $\varkappa$ (S. 137) würde für unseren Magnet nach diesen Versuchen sein

$$\varkappa = 400^2 . 300^2 \frac{300^3 . \operatorname{tang} 22^0 32' - 400^3 . \operatorname{tang} 9^0 46'}{400^5 . \operatorname{tang} 9^0 46' - 300^5 . \operatorname{tang} 22^0 32'} = 3627.$$

In der That, wenn man etwa nur die eine Ablenkung $\varphi' = 22^0 32'$ für die Entfernung $r' = 300^{mm}$ beobachtet hätte, so führt die Rechnung nach der Formel

$$\frac{M}{T} = \frac{1}{2} \frac{300^3 . \operatorname{tang} 22^0 32'}{1 + \frac{3627}{300^2}}$$

auf denselben Werth 5387800.

59. Bestimmung der Horizontal-Intensität mit dem compensirten Magnetometer.

Zweck dieses Instrumentes ist hauptsächlich die Vergleichung der erdmagnetischen Horizontalintensität an zwei Orten. Das compensirte Magnetometer besteht aus einer Bussole und einem Rahmen mit vier Magneten von ähnlicher Gestalt wie die Bussolennadel. Die beiden kleineren sind von doppelter, die grösseren von dreifacher Länge, Breite und Dicke wie die Nadel. Erstere sollen von Osten und Westen (wie S. 134), letztere von Norden und Süden (wie S. 136) ablenkend wirken, wenn der Rahmen mit seinen vier Löchern auf die Zapfen der Bussole gelegt wird. Die ablenkende Wirkung aller Stäbe soll in gleichem Sinne stattfinden, zu welchem Zwecke also die Pole der kleineren Magnete entgegengesetzt gerichtet sein müssen, wie die der grösseren.

Der Abstand der grösseren Stäbe soll nahe das 1,204fache der kleineren sein.

Ablenkungsbeobachtungen. Man orientirt die Bussole so, dass bei dem Auflegen des Rahmens die Verbindungslinie

der grösseren Magnete in den magnetischen Meridian zu liegen kommt. Man legt den Rahmen auf und beobachtet die Einstellung der Nadel; man dreht ihn in seiner Ebene um 180°, legt ihn wieder auf und beobachtet wieder die Einstellung, wobei jedesmal (S. 135) beide Nadelspitzen abgelesen werden. Die halbe Differenz der Einstellungen ist der Ablenkungswinkel.

Schwingungsbeobachtung. Man schraubt in eins der Löcher in der Nähe der grösseren Magnete einen kleinen Stift und hängt mit diesem den Rahmen in ein Schiffchen am Coconfaden auf. Ein Spiegel kann in eine der unter dem Aufhängepunct liegenden Durchbohrungen zum Zweck der Beobachtung mit Fernrohr und Scale eingeschraubt werden. Zur Bestimmung des Trägheitsmoments dienen zwei cylindrische Gewichte, die an einem Coconfaden über die äusseren Endflächen des Rahmens gehängt werden. (Vgl. übrigens Pogg. Ann. Bd. 142 S. 547.)

I. Vergleichung der Horizontal-Intensität an zwei Orten. Wenn der Magnetismus der Ablenkungsstäbe bei beiden Beobachtungen als gleich angenommen werden kann, d. h. wenn eine kurze Zeit zwischen ihnen liegt und die Temperatur an beiden Orten nahe gleich ist, so brauchen nur die Ablenkungswinkel φ_1 und φ_2 beobachtet zu werden. Die Intensitäten beider Orte verhalten sich umgekehrt wie die Tangenten der Winkel,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\operatorname{tang} \varphi_2}{\operatorname{tang} \varphi_1}.$$

Kann man den Magnetismus der Stäbe nicht als gleich voraussetzen, so wird ausserdem die Schwingungsdauer t_1 und t_2 des Rahmens an beiden Orten beobachtet, nachdem man alle vier Magnete mit den Polen gleichgerichtet hat. Dann ist

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{t_2}{t_1} \sqrt{\frac{\operatorname{tang} \varphi_2}{\operatorname{tang} \varphi_1}}.$$

II. Bestimmung der absoluten Horizontalintensität. Nennen wir

$2r$ den Abstand der Mittelpuncte der kleineren (ost-westlichen) Magnete von einander,

$2R$ denselben für die grösseren Magnete,

φ den Ablenkungswinkel,
t die Schwingungsdauer mit den gleichgerichteten Magneten,
τ dieselbe, wenn die kleineren Magnete um 180° gedreht sind,
Θ das Torsionsverhältniss des Fadens im ersteren Falle,
K das Trägheitsmoment,

so ist die absolute Horizontalintensität

$$T = \frac{\pi}{t\tau}\sqrt{\frac{K}{\operatorname{tang}\varphi}\left(\frac{\tau^2 - t^2}{r^3} + \frac{\tau^2(1-2\Theta)+t^2}{2R^3}\right)}.$$

Als Mittelpunct eines Magnetes wird der Mittelpunct des Zapfens angesehen, um welchen er drehbar ist. Um eine etwaige Unsymmetrie der Magnete gegen diese Puncte zu eliminiren, kann man den Ablenkungswinkel zweimal beobachten, das zweite Mal, nachdem man alle Magnete um 180° um ihre Zapfen gedreht hat, und das Mittel beider Winkel für φ nehmen.

Bei einem von Osten oder Westen ablenkenden Magnet (Fig S. 134) nimmt die Ablenkung einer kurzen Nadel mit verminderter Entfernung rascher zu als der reciproke Cubus der letzteren, bei einem aus Norden oder Süden wirkenden (Fig. S. 136) dagegen langsamer; d. h. die in dem Beweis auf S. 135 mit a bezeichnete Grösse ist im ersteren Falle positiv, im zweiten negativ. Diese Correctionen compensiren sich bei ähnlich gestalteten Magneten, deren Dimensionen im Verhältniss 2:3 stehen, wenn die Entfernungen das Verhältniss 1,204 haben (Pogg. Ann. Bd. 142 S. 551). Es ist also, unter m und M die Summe der magnetischen Momente der kleineren resp. grösseren Magnete verstanden, an unserem Instrument $\left(\frac{2m}{r^3} + \frac{M}{R^3}\right)\cos\varphi = T\sin\varphi$. Die Schwingungsdauer t mit gleichgerichteten Magneten liefert die Beziehung (S. 133) $(M+m)\,T = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\Theta)}$. Hieraus folgen ohne Weiteres die Formeln unter I, wenn das Verhältniss $m:M$ constant vorausgesetzt wird und das Torsionsverhältniss Θ klein ist.

Die Schwingungsdauer mit entgegengerichteten Magneten liefert $(M-m)\,T = \frac{\pi^2 K}{\tau^2\left(1+\Theta\frac{M+m}{M-m}\right)}$, woraus in Verbindung mit beiden obigen Gleichungen die Formel unter II folgt, wenn man M und m eliminirt und schliesslich $1-2\Theta$ für $\frac{1-\Theta}{1+\Theta}$ setzt.

60. Bifilarmagnetometer.

Um die zeitlichen Variationen der erdmagnetischen Horizontalintensität zu bestimmen, wird ein

Magnet an zwei gleich weit von seiner Mitte befestigten Fäden aufgehängt, so dass er horizontal liegt. Die Verbindungslinien der oberen und unteren Befestigungspuncte der Fäden werden so gegen einander gedreht, dass das erdmagnetische und das statische (durch das Gewicht des aufgehangenen Magnets hervorgebrachte) Drehungsmoment der Fäden zusammen den Magnet senkrecht zum magnetischen Meridian stellen. Am günstigsten ist es, wenn der Winkel der beiden Verbindungslinien der Fäden-Enden nahe 45^0 beträgt.

Die mit Spiegel und Scale abzulesende geringe Drehung, welche der Magnet alsdann durch eine Aenderung der horizontalen Stärke des Erdmagnetismus erfährt, kann dieser Aenderung proportional gesetzt werden. Wachsende Intensität bewegt den Nordpol des Magnets nach Norden; es ist daher bequem, wenn dieser Drehung wachsende Scalentheile entsprechen.

Um den Werth eines Scalentheiles in absolutem Maafse zu finden, nähere man dem Bifilarmagnetometer in gleicher Höhe einen horizontalen Magnet von bekanntem magnetischen Momente M (folg. Art.) aus grosser gemessener Entfernung r Millimeter von Norden (oder Süden). Die Einstellung des Bifilarmagnetometers möge um n Scalentheile differiren, je nachdem der Nordpol oder der Südpol des Stabes ihm zugewandt ist. Dann bedeutet 1 Scalentheil eine Aenderung der erdmagnetischen Intensität um

$$\varDelta = \frac{4\,M}{nr^3}.$$

Um den Werth des Scalentheiles in Bruchtheilen der Horizontalintensität T an dem Orte zu erhalten, was der gewöhnliche Zweck ist, braucht man $\varDelta$ nur durch T (Tab. 22) zu dividiren.

Wenn also der Einstellung des Bifilarmagnetometers auf den Scalentheil p die Intensität T entspricht, so ist diejenige bei der Einstellung p'

$$T' = T\left[1 + \frac{\varDelta}{T}(p'-p)\right].$$

Das Bifilarmagnetometer in dieser einfachen Form ist nur zur Beobachtung der Intensitätsvariationen in kürzeren Zeiträumen geeignet, da mit der Temperatur der Abstand und

die Länge der Aufhängefäden und auch das magnetische Moment des aufgehangenen Stabes mit der Zeit veränderlich ist.

Beweis. Nennen wir m den Magnetismus des Bifilarstabes, so wird auf ihn vom Erdmagnetismus das Drehungsmoment mT ausgeübt. Durch eine Aenderung von T um Δ entsteht eine Aenderung des Drehungsmomentes um $m\Delta$. Die Annäherung des Magnetes M aus der grossen Entfernung r fügt das Moment $\frac{2Mm}{r^3}$ hinzu, resp. vermindert um so viel. Vgl. den Anhang. Wenn also hierbei die Drehung um n Scalentheile beobachtet wird, so ist $\Delta : 1 = \frac{4M}{r^3} : n$.

61. Bestimmung eines Stabmagnetismus nach absolutem Maasse.

I. Die genaue Ausführung dieser Aufgabe wird durch die in Art. 58 beschriebenen Beobachtungen geleistet, denn aus den beiden beobachteten Zahlen $M.T = A$ und $\frac{M}{T} = B$ fällt durch Multiplication T heraus und es wird erhalten $M = \sqrt{A.B}$. M aber ist der Magnetismus (das magnetische Moment) des zu den Schwingungen und Ablenkungen gebrauchten Stabes nach absolutem Gaussischen Maasse. (Vgl. den Anhang.)

Der im vorigen Beispiel gebrauchte Magnet hat also den Magnetismus $\sqrt{18301000 . 5387800} = 9929800$.

II. Bestimmung durch Ablenkungsbeobachtungen. Wegen der Veränderlichkeit des Stabmagnetismus durch Temperatur und Zeit ist grosse Genauigkeit selten gefordert; und insofern die horizontale Intensität des Erdmagnetismus für den Beobachtungsort genähert bekannt ist, (der aus Tab. 22 entnommene Werth wird selten um mehr als 1 Procent fehlerhaft sein) so genügen die Ablenkungsbeobachtungen nach 58, II.

Ja meistens wird man nur eine Ablenkung aus einer Entfernung zu messen brauchen. Wenn nämlich

T die horizontale Intensität des Erdmagnetismus,

r die gegenseitige Entfernung der Mittelpuncte von Magnet und Nadel in Millimetern,

φ der Ablenkungswinkel der letzteren durch den Magnet,

so berechnet man das magnetische Moment M des Magnets nach der Formel

$$M = \tfrac{1}{2} r^3 T \operatorname{tang} \varphi,$$

wenn der ablenkende Magnet östlich oder westlich von der Nadel, wie in der Figur auf S. 134 gelegt war; oder

$$M = r^3 \, T \operatorname{tang} \varphi,$$

wenn der Magnet nördlich oder südlich gelegt war (S. 136).

Streng richtig ist diese Formel, wie sich aus (58) ergibt, nur dann, wenn Magnet und Nadel sehr kurz gegen ihren Abstand sind. Der Fehler kann, eine kurze Nadel vorausgesetzt, sobald der Abstand r zwischen Magnet und Nadel mindestens das

3 4 5 6 oder 7-fache der Länge des Magnets ist, höchstens etwa

6 3 2 1½ oder 1 Procent des Gesammtwerthes betragen.

Mit Vortheil kann auch hier, um eine genaue Beobachtung bei grossem Abstande zu erzielen, die Winkelmessung durch Spiegel und Scale angewandt werden, wobei die Torsion des Fadens durch Multiplication von T mit $1 + \Theta$ (54) in Rechnung gesetzt wird.

Bei der Untersuchung eines nicht stabförmigen Magnets, beispielsweise auch eines magnetischen Minerales, dessen magnetische Axe sich nicht aus der Gestalt erkennen lässt, bringt man durch Drehen den Körper in die Lage, in welcher die ablenkende Wirkung am grössten ist. Zugleich erhält man hierbei die Lage der magnetischen Axe, nämlich bei der Anordnung S. 134 als die Verbindungslinie der Mittelpuncte von Magnet und Nadel; bei der Anordnung S. 136 als die auf dieser Verbindungslinie senkrechte Horizontale. — Statt dessen kann man auch die Componenten des magnetischen Moments in drei auf einander senkrechten Richtungen bestimmen. Findet man hierfür die Werthe M_1, M_2, M_3 so ist $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$. Die Richtung der magnetischen Axe wird daraus gefunden, dass $\frac{M_1}{M}$, $\frac{M_2}{M}$, $\frac{M_3}{M}$ die Cosinus der Winkel sind, welche sie mit obigen drei Richtungen bildet.

III. Bestimmung durch Schwingungsbeobachtung. Für einen Magnetstab von regelmässiger Gestalt lässt sich das Trägheitsmoment K (53) leicht berechnen, und man erhält aus der Schwingungsdauer t

$$M = \frac{\pi^2}{t^2} \frac{K}{T}.$$

Die Torsion des Fadens ist dabei vernachlässigt. Sie

kann leicht eliminirt werden dadurch, dass man als Träger des Magnetes ein Schiffchen anwendet, welches allein am Faden dieselbe Schwingungsdauer hat wie mit dem Magnet.

Die bei der Division des gefundenen Magnetismus durch das in Milligrammen ausgedrückte Gewicht des Magnetes entstehende Zahl kann der specifische Magnetismus des Körpers genannt werden. Er beträgt bei den besten Magneten von sehr langgestreckter Gestalt etwa 1000.

62. Die Ohm'schen Gesetze für den galvanischen Strom.

Im einfachen, unverzweigten Stromkreise.

1. Der Leitungswiderstand w eines cylindrischen Stromleiters ist seiner Länge l direct und dem Querschnitt q umgekehrt proportional $w = k.\frac{l}{q}$. Der Factor k ist für verschiedenes Material von verschiedener Grösse. Man nennt ihn den specifischen Leitungswiderstand des Körpers. So wie man $\frac{1}{w}$ das Leitungsvermögen zu nennen pflegt, so nennt man auch $\frac{1}{k}$ das specifische Leitungsvermögen.

Wenn als Widerstandseinheit die Siemens'sche oder Quecksilbereinheit (Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 Meter Länge und 1 □^{mm} Querschnitt bei 0°) angenommen ist, so wird man auch den specifischen Widerstand des Quecksilbers bei 0° gleich Eins setzen. Der Widerstand eines cylindrischen Körpers von der Länge l Meter und dem Querschnitt q □^{mm} ist alsdann durch die Zahl $k\frac{l}{q}$ in Quecksilbereinheiten gegeben, wenn k den specifischen Widerstand bezogen auf den des Quecksilbers bedeutet. Umgekehrt, wenn gefunden ist, dass ein cylindrischer Körper (Draht, Flüssigkeitssäule in einem prismatischen Gefäss) von der Länge l Meter und dem Querschnitt q □^{mm} den Widerstand $= w$ Siem. hat, so ist der specifische Leitungswiderstand des Materials $k = w.\frac{q}{l}$, oder das specifische Leitungsvermögen $\frac{1}{k} = \frac{l}{w.q}$, bezogen auf Quecksilber.

Siehe das specifische Leitungsvermögen der wichtigsten Substanzen in Tab. 24.

2. Der gesammte Widerstand ist gleich der Summe der Widerstände aller einzelnen Theile.

3. Die gesammte elektromotorische Kraft ist gleich der algebraischen Summe der einzelnen elektromotorischen Kräfte.

4. Die Stromstärke oder Intensität i ist der elektromotorischen Kraft e direct, dem Widerstande w umgekehrt proportional;

$$i = C.\frac{e}{w}.$$

Der Zahlenwerth für den Factor C hängt von den Einheiten ab, in welchen i, e und w gemessen werden. Am einfachsten ist es, sie so zu wählen, dass $C = 1$ wird. Ein solches System von galvanischen Einheiten wird zum Beispiel gegeben, wenn man die Stromstärke nach magnetischem Maasse (**66**, S. 151) ausdrückt, den Widerstand in Siemens'schen Einheiten, und die elektromotorische Kraft eines Grove'schen oder Bunsen'schen Elementes = 20,0 oder die eines Daniell'schen = 11,7 setzt. Dann ist einfach $i = \frac{e}{w}$. Zum Beispiel: Eine Säule von 8 Grove'schen Bechern erzeugt in einem Schliessungskreise vom Widerstande = 100 Siem. den nach magnetischem Maasse gemessenen Strom $\frac{8.20}{100} = 1{,}6$.

Stromverzweigung.

Wird ein Strom i zwischen zwei Puncten der unverzweigten Leitung in mehrere Wege vom Widerstande w_1, w_2 . . . verzweigt, und sind die Zweigströme entsprechend i_1, i_2 . . ., so ist

5. die Summe der Zweigströme gleich dem unverzweigten Strom; $i_1 + i_2 \ldots = i$.

6. Die einzelnen Zweigströme verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände der resp. Wege (oder direct wie die Leitungsvermögen derselben); $i_1 : i_2 : \ldots = \frac{1}{w_1} : \frac{1}{w_2} : \ldots$

7. Das gesammte Leitungsvermögen des verzweigten Weges ist gleich der Summe der Leitungsvermögen der einzelnen Wege; $\frac{1}{w} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \ldots$

Die unter 2. bis 7. gegebenen Sätze lassen sich nach Kirchhoff in folgende zwei zusammenfassen, welche ohne Weiteres die Gleichungen für die Stromstärken in beliebig verzweigten Leitungen geben.

I. An jedem Verzweigungspuncte ist die Summe der Stromstärken gleich Null, wenn man den ankommenden Strömen das entgegengesetzte Vorzeichen gibt wie den abfliessenden.

II. Betrachtet man einen beliebigen in sich geschlossenen Theil der Leitung, zählt darin alle elektromotorischen Kräfte und Ströme in einer Richtung positiv, in der anderen negativ, so ist die Summe der Producte aus den einzelnen Widerständen in die Stromstärken gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte.

Fig. 11.

Zum Beispiel ergeben sich für die Wheatstone'sche Combination sämmtliche sechs Gleichungen sofort, wenn wir die Zweigströme und Widerstände den Zahlen entsprechend benennen:

$$I - i_1 - i_3 = 0 \qquad IW + i_1 w_1 + i_4 w_4 = E$$
$$I - i_2 - i_4 = 0 \qquad iw - i_1 w_1 + i_3 w_3 = 0$$
$$i + i_1 - i_4 = 0 \qquad iw - i_2 w_2 + i_4 w_4 = 0.$$

Die übrigen Gleichungen (z. B. $i + i_2 - i_3 = 0$) sind in diesen enthalten.

63. Strommessung mit der Tangentenbussole.

Für viele Zwecke genügt die relative Messung, das heisst die Bestimmung des Verhältnisses von Stromstärken, worüber zuerst gehandelt werden soll.

Die Tangentenbussole besteht aus einem Multiplicator, dessen Windungsebene im magnetischen Meridian fest aufgestellt ist. In der Mitte befindet sich eine Bussole, deren Nadel gegen den Durchmesser der Windungen klein sein muss.

Bringen zwei durch den Multiplicator geleitete Ströme die Ablenkungswinkel φ und φ' der Bussole hervor, so verhalten sich die Stärken (Intensitäten) i und i' beider Ströme wie die trigonometrischen Tangenten (Tab. 30) der Ablenkungswinkel;

$$i : i' = \text{tang}\, \varphi : \text{tang}\, \varphi'.$$

Für die Genauigkeit der Strommessung sind sowohl sehr kleine als sehr grosse Ablenkungswinkel ungünstig; am günstigsten sind diejenigen von etwa 45°. Daher muss man je nach der Stärke der zu messenden Ströme verschieden empfindliche Tangentenbussolen anwenden, d. h. solche mit Windungen von verschiedenem Durchmesser oder verschiedener Anzahl; oder es wird ein Instrument so eingerichtet, dass man je nach Bedürfniss den Strom durch eine grössere oder geringere Anzahl von Windungen leiten kann. Die Angaben zweier verschiedener Instrumente werden auf einander reducirt, indem man an beiden den Ausschlagswinkel misst, welchen ein und derselbe Strom hervorbringt. Wäre z. B. dieser Winkel am Instrument (1) 66°,5, an (2) 14°,2, so sind die Tangenten der Winkel an (1) mit $\frac{\text{tang}\, 14^0{,}2}{\text{tang}\, 66^0{,}5} = \frac{0{,}253}{2{,}30} = 0{,}110$ zu multipliciren, um sie mit den an (2) gemessenen vergleichbar zu machen. — Wie der Reductionsfactor statt dessen durch Rechnung aus der Windungszahl und den Dimensionen des Multiplicators abgeleitet werden kann, ergibt sich aus (66) S. 151.

Commutator. Die Tangentenbussole pflegt so eingerichtet zu sein, dass die Nadel auf Null zeigt, wenn die Windungsebene im magnetischen Meridian liegt. Ob diess genau der Fall ist, muss übrigens, vorzüglich bei der Anwendung einer sehr kurzen Nadel, geprüft werden; denn die Proportionalität der Stromstärke mit der Tangente des Ablenkungswinkels

findet nur bei genauer Orientirung statt, besonders für grössere Ausschläge. Indessen umgeht man leicht diese Schwierigkeiten, indem man den zu messenden Strom nach einander in beiden Richtungen durch die Tangentenbussole gehen lässt und das Mittel aus den Ablenkungen nach beiden Seiten (von dem Gesammtausschlage die Hälfte) für φ setzt. In diesem Mittelwerth heben sich die von einer fehlerhaften Aufstellung herrührenden Fehler auf. Es ist daher anzurathen, mit der Tangentenbussole einen Commutator ein für allemal zu verbinden, welcher die Stromrichtung im Multiplicator umzukehren gestattet, ohne in dem übrigen Theile der Leitung etwas zu verändern. Hiermit ist zugleich der Vortheil doppelter Genauigkeit verbunden; ferner braucht man die Ruhelage der Nadel nicht genau zu beobachten, und endlich dient ein gut eingerichteter Commutator zum bequemen Schliessen und Oeffnen des Stromes.

Abweichung vom Tangentengesetz. Soll das Tangentengesetz für alle Ablenkungswinkel bis auf 1 Procent richtig sein, so darf die Länge der Nadel höchstens etwa $\frac{1}{12}$ von dem Durchmesser der Windungen betragen. Man wird also eine kurze Nadel mit angesetzten längeren Zeigern (etwa durch Firniss aufgekitteten Glasfäden) wählen, wobei man bis zu 20^{mm} Länge hinabsteigen kann. Vgl. übrigens S. 152. — Die Abweichung vom Tangentengesetz lässt sich dadurch verringern, dass man die Nadel nicht in der Ebene der Windungen des Multiplicators, sondern um ein Viertel seines Durchmessers von derselben entfernt aufstellt. Alsdann wird ein Fehler von 1% erst bei einer Nadellänge gleich $\frac{1}{4}$ des Durchmessers entstehen, und bei etwa $\frac{1}{8}$ kann der Fehler als unmerklich betrachtet werden. (Gaugain. Helmholtz.)

Für die Ablesung der Nadel in der Ruhelage oder bei schwachen Ablenkungen sind zwei zu der Nadelaxe senkrechte Zeiger (Glasfäden) bequem. — Zur Vermeidung der Parallaxe bei der Ablesung bedecke man die Bussole mit einem in der Mitte belegten Spiegelglase und halte das Auge so, dass das Spiegelbild desselben in die Nadel oder den Zeiger fällt. — Behufs genauer Messung werden jedesmal beide einander gegenüberliegende Spitzen abgelesen. Vgl. S. 135. 138.

Zum Beruhigen der Nadel kann ein kleiner Magnet dienen, welcher nach dem Gebrauch hinreichend entfernt wird.

Auch der Commutator lässt sich bei einiger Uebung zum Beruhigen anwenden. Insbesondere verfährt man bei dem Umkehren des Stromes so, dass man zunächst nur unterbricht und erst in dem Augenblick, wo die Nadel nach Zurücklegung einer Schwingung auf der anderen Seite umkehrt, wieder schliesst.

64. Sinusbussole.

Die Sinusbussole besteht wie die Tangentenbussole aus einem Multiplicator und einer fest mit demselben verbundenen Bussole, oder anstatt der letzteren auch wohl einer Magnetnadel mit einzelnen Einstellungsmarken. Der Multiplicator selbst aber ist über einer zweiten Kreistheilung drehbar.

Bei jeder Messung von Strömen, welche durch die Sinusbussole mit einander verglichen werden sollen, stellt man mit Hülfe der letzteren Drehung den Multiplicator so, dass der Winkel zwischen ihm und der Nadel (wir nennen ihn den Bussolenwinkel) immer der nämliche ist, d. h. dass die Nadel auf denselben Punct ihrer Theilung zeigt. Alsdann ist die Stromstärke dem Sinus (Tab. 30) des Ablenkungswinkels φ proportional, d. h. des Winkels, um welchen der Multiplicator aus der Stellung, wo der gleiche Bussolenwinkel ohne Strom bestand, gedreht werden musste;

$$i : i' = \sin\varphi : \sin\varphi'.$$

Bei der Messung schwacher Ströme beobachtet man mit kleinerem, bei stärkeren mit grösserem Bussolenwinkel. Die so erhaltenen Resultate sind nicht ohne Weiteres mit einander vergleichbar; indessen kann man leicht ein für allemal den Reductionsfactor bestimmen, mit welchem die für einen Bussolenwinkel erhaltenen Beobachtungen zu multipliciren sind, um auf den anderen zurückgeführt zu werden. Zu dem Zwecke werden die durch denselben Strom bei beiden zu vergleichenden Bussolenwinkeln (1) und (2) hervorgebrachten Ablenkungswinkel α_1 und α_2 gemessen. Dann ist $n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$ der Factor, mit welchem die bei dem Bussolenwinkel (2) gemessenen Stromstärken zu multipliciren sind, um auf dasselbe Maass wie bei (1) reducirt zu werden. So mag man etwa die Bussolenwinkel 0° 50° 70° 80° auf einander reduciren.

Der Vortheil der Sinusbussole besteht darin, dass die Gültigkeit des Sinusgesetzes nicht an die Gestalt und Grösse des Multiplicators oder der Nadel gebunden ist; der Nachtheil in einer zeitraubenderen Einstellung und doppelter Fehlerquelle. Die Grenzen der Stromstärken, welche durch dasselbe Instrument verglichen werden können, sind bei weiten Drahtwindungen dieselben, bei engen Windungen weiter als bei der Tangentenbussole.

65. Spiegelgalvanometer.

Feststehende Multiplicatoren, welche die Nadel eng umschliessen, lassen sich im Allgemeinen nur als Galvanoskope, d. h. zur Prüfung eines Mehr oder Weniger des Stromes gebrauchen; wenigstens verlangen sie zur Messung eine vorausgegangene empirische Graduirung, indem man die Ausschlagswinkel einiger bekannter Stromstärken beobachtet und (etwa graphisch) eine Tabelle für das betr. Instrument interpolirt.

Indessen können solche Instrumente zur messenden Vergleichung von Stromstärken angewandt werden, wenn man sich auf kleine, mit Fernrohr und Scale (**47. 48**) beobachtete Ablenkungen beschränkt. In diesem Falle ist der Strom der Tangente des Ablenkungswinkels proportional, oder auch bis zu Winkeln von einigen Graden merklich dem in Scalentheilen gemessenen Ausschlage selbst. Die Grenze, bis zu welcher man hierbei gehen darf, hängt natürlich von den Dimensionen des Multiplicators und der Nadel ab.

Eine einfache Methode, den Reductionsfactor auf absolutes Maass zu bestimmen, siehe **68** am Schluss.

Soll ein Galvanoskop mit engen Windungen auch zur Messung von Strömen mit grösserem Ausschlagswinkel benutzt werden, so bleibt nichts übrig, als dasselbe empirisch durch Vergleichung mit einem der obigen Messinstrumente oder mit dem Voltameter (**67**) zu graduiren.

66. Absolute Strommessung nach magnetischem Maafse mit der Tangentenbussole.

Bei den bisher beschriebenen Methoden liefern nur die mit einem und demselben Instrument angestellten Beobachtungen

vergleichbare Resultate, indem die zur Messung des Stromes dienende Einheit in jedem Falle eine willkürliche, von den Dimensionen des Instrumentes und der Stärke des Erdmagnetismus abhängige ist. Um die Stromstärke in einer allgemein verständlichen Einheit auszudrücken, definirên wir zunächst als magnetische oder Weber'sche Stromeinheit denjenigen Strom, welcher die Einheit der magnetischen Wirkung ausübt. (Vgl. den Anhang.) Bei einer Messung mit der Tangentenbussole erhält man den Strom in diesem Maafse nach folgender Regel. Es bedeute

n die Anzahl,
r den mittleren Halbmesser der kreisförmigen Windungen in Millimetern,
T die horizontale Intensität des Erdmagnetismus (58 und Tab. 22),
α den Ablenkungswinkel der Nadel,

so ist die gesuchte Stärke i des Stromes, welcher diese Ablenkung hervorbringt, nach magnetischem Maafse

$$i = \frac{rT}{2n\pi}.\operatorname{tang}\alpha.$$

$\frac{rT}{2n\pi}$ nennen wir den Reductionsfactor auf magnetisches Strommaafs.

Beweis. Die Länge sämmtlicher Windungen ist $2nr\pi$. Der Strom i sucht die Nadel senkrecht zur Windungsebene zu stellen und übt auf die kurze Nadel vom magnetischen Moment M im Mittelpuncte, wenn sie um den Winkel α aus der Windungsebene abgelenkt ist, das Drehungsmoment $2nr\pi\,\frac{iM}{r^2}\cos\alpha$ aus. α ist zugleich der Ablenkungswinkel aus dem magnetischen Meridian, also beträgt das erdmagnetische Drehungsmoment $MT\sin\alpha$. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke entsteht die Formel.

Der mittlere Halbmesser einer aus mehreren Windungen aufgewickelten Drahtes bestehenden Tangentenbussole wird am einfachsten bei der Herstellung des Multiplicators aus der Länge l des Drahtes, welcher die n Windungen bildet, als $r = \frac{l}{2n\pi}$ gefunden.

Der Reductionsfactor einer Tangentenbussole wird natürlich, insofern die Intensität des Erdmagnetismus von

Ort und Zeit abhängt, ebenfalls nach Ort und Zeit ein anderer. Z. B. ist

für den Anfang des Jahres		1870	1875	1880
in Göttingen	$T =$	1,850	1,868	1,888
in Darmstadt		1,91	1,93	1,95
in Zürich		2,00	2,02	2,04.

Für Orte, an denen T nicht bestimmt worden ist, kann man es aus der Tabelle 22 entnehmen, selbstverständlich unter möglichster Vermeidung von Localeinflüssen durch in der Nähe befindliche eiserne Gegenstände, insbesondere längere Eisenleitungen.

Es ist Sorge zu tragen, dass nicht der Strom in den äusseren Leitungsdrähten auf die Nadel wirke. Das sicherste Mittel dagegen besteht darin, dass Zu- und Ableitungsdrähte überall dicht neben einander geführt werden.

Beispiel: Ein Multiplicator ist durch Aufwinden eines 19480^{mm} langen Drahtes in 24 kreisförmigen Windungen gebildet. Dann ist $r = \frac{19480}{48.3,1416} = 129,2^{mm}$. Ferner sei T gleich 1,92, so ist die Stärke eines Stromes, welcher den Ablenkungswinkel α hervorbringt, nach magnetischem Maafse $= \frac{129,2.1,92}{2.24.3,1416} \operatorname{tang} \alpha = 1,645.\operatorname{tang} \alpha$.

Correctionsformel wegen der Nadellänge und des Querschnitts der Windungen. Es ist für die Rechnung nach obiger Formel vorausgesetzt, dass die Dimensionen des Querschnittes der Windungslage gegen den Durchmesser der Windungen sehr klein sind. Nicht selten kommt es vor, dass diese Bedingung für einen Multiplicator aus vielen Windungen nicht hinreichend erfüllt ist. Bilden die Windungen wie gewöhnlich eine Lage mit rechteckigem Querschnitt, so kann man die davon herrührende Correction erster Ordnung anbringen, indem man anstatt $\frac{rT}{2n\pi}$ schreibt $\frac{rT}{2n\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} - \frac{1}{3}\frac{b^2}{r^2}\right)$; unter a die halbe Breite, unter b die halbe Höhe des rechteckigen Querschnitts verstanden.

Ist endlich die Nadellänge nicht sehr klein gegen den Durchmesser der Windungen, so kommt erstens zu obigem Ausdruck noch der Factor $\left(1 - \frac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\right)$ hinzu. Zweitens ist an-

statt tang φ zu setzen $\left(1 + \frac{15}{4} \frac{l^2}{r^2} \sin^2 \varphi\right)$ tang φ. Hier bedeutet l den halben Abstand der Nadelpole (der „Schwerpuncte freien nördlichen und südlichen Magnetismus") von einander. Ist l nicht durch Versuche bestimmt, so mag man bei einer gewöhnlichen Nadel 0,85 der Länge als Polabstand annehmen.

Die vollständige Formel wird also unter Berücksichtigung der Kleinheit der Correctionsglieder

$$i = \frac{rT}{2n\pi}\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} - \tfrac{1}{3}\frac{b^2}{r^2} - \tfrac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\right)\left(1 + \tfrac{15}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin^2\varphi\right) \text{tang}\, \varphi.$$

Ist die Magnetnadel am Faden aufgehangen, dessen Torsionsverhältniss $= \Theta$ (54), so muss $T(1 + \Theta)$ anstatt T eingesetzt werden.

Das über den Gebrauch des Commutators und die Ablesung beider Spitzen der Nadel (S. 147. 148) Gesagte gilt auch hier.

67. Strommessung nach chemischem Maafse mit dem Voltameter.

Die mit einem Voltameter gemessenen chemischen Zersetzungsproducte eines Stromes lassen ebenfalls die Stromstärke nach einem genau definirten und mit dem vorigen vergleichbaren Maafse mit Hülfe der folgenden Sätze bestimmen.

1. Die durch verschiedene Ströme in derselben Zeit zersetzten Mengen sind der Stromstärke proportional.

2. Die Zersetzungsproducte eines und desselben Stromes in verschiedenen Elektrolyten sind einander chemisch äquivalent. (Faraday'sches Gesetz.)

3. Der Strom, welcher nach magnetischem Maafse gemessen die Stärke Eins hat, zersetzt in einer Minute 0,560 Mgr. Wasser. (Elektrochemisches Aequivalent des Wassers nennt Weber die Stromstärke 107, welche in einer Secunde 1 Mgr. Wasser zersetzt.)

Als Elektrolyten pflegt man entweder das mit Schwefelsäure angesäuerte Wasser zwischen Platinelektroden, oder eine wässrige Lösung von Kupfervitriol, oder endlich eine solche von salpetersaurem Silber anzuwenden, die letzteren zwischen

Kupfer- oder Silberelektroden. Die verdünnte Schwefelsäure leitet bei dem specifischen Gewicht 1,23 am besten. Man wende nur chemisch reine Säure an. — Die Lösungen der Metallsalze mögen durch Verdünnen concentrirter Lösungen mit etwa gleichen Mengen Wasser bereitet werden.

Bei einer Strommessung mit dem Voltameter lässt man den Strom eine gemessene Zeit hindurchgehen und bestimmt die Menge der Zersetzungsproducte. Mittels Division der letzteren durch die Zeitdauer bestimmt man dann die in der Zeiteinheit zersetzte Menge. Wir wollen die Zeit hier immer in Minuten ausgedrückt denken.

Volumvoltameter. Gewöhnlich wird bei dem Wasservoltameter das Volumen des entwickelten Knallgases, welches in einer getheilten Röhre aufgefangen wird, gemessen. Behufs genauer Definition reducirt man das Gasvolumen auf 0° und 760^{mm} (**18**) nach der Formel

$$v_0 = \frac{v}{1 + 0{,}003665 . t} \cdot \frac{H}{760}.$$

Hier bedeutet

v das beobachtete Volumen,

v_0 das auf 0° und 760^{mm} Quecksilber reducirte Volumen,

t die Temperatur bei der Beobachtung,

H den in Millim. Quecksilber gemessenen Druck, unter welchem das Gas aufgefangen wurde.

So gut wie immer wird das entwickelte Gas über einer Flüssigkeit aufgefangen. Um in diesem Falle den Gasdruck H zu finden, nenne man h die Höhe der Flüssigkeitssäule in Mm. über der freien Oberfläche, $\varDelta$ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, b den Barometerstand. Alsdann ist $H = b - h . \frac{\varDelta}{13{,}6}$. (13,6 ist das spec. Gewicht des Quecksilbers. Wird über Quecksilber aufgefangen, so ist natürlich $H = b - h$.) — Bei schwächeren Strömen ist nur das entwickelte Wasserstoffgas aufzufangen und durch Multiplication mit $\frac{3}{2}$ das Volumen des Knallgases zu berechnen, weil der Sauerstoff in Folge von Ozonbildung theilweise vom Wasser absorbirt wird. Aus demselben Grunde ist anzurathen, dieselbe Schwefelsäure wiederholt anzuwenden. — Siehe das Beispiel S. 156.

Wird das Gas über dem angesäuerten Wasser selbst auf-

gefangen, so kann man es als mit Wasserdampf gesättigt ansehen. Um auf trocknes Gas zu reduciren, zieht man die Spannkraft e des Wasserdampfes für die betr. Temperatur t (Tab. 13) von H ab. Für gewöhnliche Zimmertemperatur genügt es meistens, für e in Mm. t in Graden Celsius zu setzen.

Gewichtsvoltameter. Anstatt das Gas zu messen, bestimmt man auch wohl das Gewicht des zersetzten Wassers durch eine Wägung vor und nach dem Versuche, wobei durch eine kleine mitgewogene Vorlage von concentrirter Schwefelsäure das Entweichen von Wasserdämpfen mit dem Gase verhindert wird. Da die Dichtigkeit des Knallgases bei 0^0 und $760^{mm} = 0,0005363$, so entspricht einem Cub. Cm. Knallgas 0,5363 Mgr. Wasser. Für genäherte Reductionen kann man sich merken, dass unter mittleren Verhältnissen (genau z. B. bei $+16^0$ und 750^{mm} Druck) ein Cubikcentimeter Knallgas $\frac{1}{2}$ Mgr. wiegt.

Im Kupfer- wie im Silbervoltameter wird die Stromstärke durch Bestimmung der Gewichtszunahme der negativen Elektrode gefunden.

Reduction der verschiedenen Strommaafse auf einander. Durch den Gebrauch der verschiedenen Voltameter haben wir also vier verschiedene Definitionen für die Stärke des galvanischen Stromes, nämlich

1. als das Volumen des in 1^{min} entwickelten Knallgases bei 0^0 und 760^{mm}, (in der Praxis gebräuchlich. Jacobi.)
2. das Gewicht des in 1^{min} zersetzten Wassers,
3. des in 1^{min} niedergeschlagenen Kupfers,
4. des in 1^{min} niedergeschlagenen Silbers.

Um bequeme Zahlen zu haben, messen wir das Volumen nach Cubikcentimetern, die Gewichte nach Milligrammen.

Zu diesen chemischen Definitionen kommt noch

5. das oben durch die Formel (S. 151) definirte magnetische Maafs des Stromes bei der Bestimmung mit der Tangentenbussole.

Sehr häufig kommt die Aufgabe vor, die in einem dieser Maafse ausgedrückte Stromstärke auf eins der anderen zu reduciren. Dazu genügen die obigen Angaben über die Dichtigkeit des Knallgases und die durch den Strom Eins nach magnetischem Maafse zersetzte Wassermenge, wenn man die Aequivalentgewichte 9, 31,7 und 107,9 für Wasser, Kupfer

und Silber hinzunimmt. Zur grösseren Bequemlichkeit aber ist in Tab. 25 der Reductionsfactor von jedem Maafs auf ein anderes gegeben.

Es ist dabei nicht ohne Interesse, dass man nur das Volumen Knallgas auf 800 anstatt der gebräuchlichen 760^{mm} Quecksilberdruck zu reduciren braucht, um eine sehr nahe und für die Praxis immer genügende Uebereinstimmung zwischen der Weber'schen (5) und der Jacobi'schen (1) Stromeinheit herzustellen.

Beispiel. Strommessung mit dem Wasservoltameter nach Volumen. Die Dauer des Stromes sei $= 10^{min}$, das Volumen des entwickelten Wasserstoffes $= 18{,}4$ C.C.

Temp. $= 14^0$. Barometerstand $= 762^{mm}$. Das Gas sei aufgefangen über einer Säule Schwefelsäure von 1,23 spec. Gew., welche am Schlusse des Versuches die Höhe 55^{mm} hat.

18,4 C.C. Wasserstoff entsprechen 27,6 C.C. Knallgas. Der Druck des Gases ist nach Obigem $H = 762 - 55 \cdot \frac{1{,}23}{13{,}6} - 12 = 745^{mm}$. Dieselbe Menge würde bei 0^0 und 760^{mm} (S. 154) das Volumen $\frac{27{,}6}{1 + 0{,}003665 \cdot 14} \cdot \frac{745}{760} = 25{,}74$ haben. Folglich sind in 1^{min} entwickelt worden 2,574 C.C.; 2,574 ist also die Stromstärke nach C.C. Knallgas in 1^{min}. Dieselbe ist also gemäss Tab. 25.

nach Mgr. Wasser in $1^{min} = 2{,}574 \cdot 0{,}5363 = 1{,}380$
„ „ Kupfer „ „ $= 2{,}574 \cdot 1{,}889 = 4{,}861$
„ „ Silber „ „ $= 2{,}574 \cdot 6{,}432 = 16{,}55$
nach magnetischem Maafse $= 2{,}574 \cdot 0{,}9579 = 2{,}465$.

68. Bestimmung des Reductionsfactors eines Galvanometers.

Ist die Windungszahl u. s. w. des Multiplicators unbekannt oder seine Gestalt derartig, dass man den Reductionsfactor C nicht berechnen kann, so muss man ihn empirisch bestimmen. Um der Kürze willen beziehen wir uns auf ein Tangentengalvanometer. Für die Sinusbussole ist nur $\sin\alpha$ anstatt $\tang\alpha$ einzusetzen.

I. Eine Tangentenbussole von bekanntem Reductionsfactor C' wird mit dem untersuchten Instrument in denselben Stromkreis eingeschaltet. Sind die Ablenkungen resp. α' und α, so ist

$$C = C' \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

II. Mit dem Voltameter. Man lässt einen Strom

durch das Galvanometer und ein Voltameter eine gemessene Zeit lang hindurchgehen. Ist

τ diese Zeit,

m die im Voltameter ausgeschiedene oder zersetzte Menge,

α der Ablenkungswinkel der Bussole,

so ist der gesuchte Reductionsfactor C, d. h. die Zahl, mit welcher die Tangente des Ablenkungswinkels zu multipliciren ist, um die Stromstärke in absolutem Maafse zu erhalten,

$$C = \frac{m}{\tau . \operatorname{tang} \alpha}.$$

Hier wird C zunächst für das durch die Art des Voltameters bestimmte Strommaafs gegeben, kann aber leicht mit Hülfe von Tab. 25 für ein anderes Maafs umgerechnet werden.

Da ein Strom, besonders bei eingeschaltetem Voltameter, selten längere Zeit constant bleibt, so beobachte man den Stand der Nadel während des Versuches in regelmässigen Zeitintervallen, z. B. von Minute zu Minute, und nehme schliesslich das arithmetische Mittel. Mit Vortheil wendet man den Commutator dabei an. Die Bestimmung wird am genauesten, wenn der Ablenkungswinkel ungefähr 45^0 beträgt.

Als Beispiel nehmen wir an, der obige Strom (vor. Seite) habe die Ablenkung $42^0,6$ hervorgebracht, so ist der Reductionsfactor $= \frac{25,74}{10 . \operatorname{tang} 42^0,6}$ $= \frac{2,574}{0,9195} = 2,799$. Ein Strom also, welcher an dieser Tangentenbussole den Ablenkungswinkel φ hervorbringt, würde in 1^{min} $2,799 . \operatorname{tang} \varphi$ C.C. Knallgas von 0^0 und 760^{mm} entwickeln. Nach magnetischem Maasse wäre der Factor $= 2,799 : 0,9579 = 2,681$.

III. Mittels einer bekannten elektromotorischen Kraft. Aus dem Satze, dass der Strom, welchen ein Grove'sches oder ein Bunsen'sches Element in einem Schliessungskreise vom Widerstande w Siem. erzeugt, nach magnetischem Maafse $= \frac{20}{w}$ ist, ergibt sich leicht eine einfache, besonders auf Spiegel-Galvanometer anwendbare Methode. Bringt nämlich eine Säule von n Grove'schen Elementen die Ablenkung α hervor, während der gesammte Leitungswiderstand $= w$ Siem. ist, so wird gefunden

$$C = \frac{n . 20}{w . \operatorname{tg} \alpha}.$$

Bei Anwendung der Daniell'schen Säule ist 11,7 anstatt 20 zu setzen.

w ist der Widerstand, welchen man eingeschaltet hat, vermehrt um den des Galvanometers und der Säule. Der letztere kann bei sehr empfindlichen Galvanometern meist gegen den übrigen vernachlässigt werden.

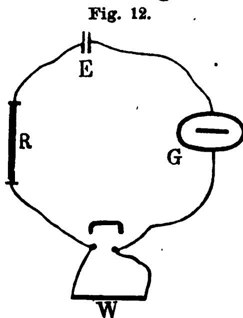
69. Galvanische Widerstandsbestimmung mit dem Rheostaten.

Die Widerstandsbestimmung unterscheidet sich, je nachdem Widerstände nur auf Gleichheit zu prüfen sind, oder das Verhältniss ungleicher Grössen bestimmt werden muss. Ersteres ist der Fall, wenn in einem Rheostaten (Widerstandsscale) das Mittel gegeben ist, bekannte Widerstände von beliebiger Grösse herzustellen. Wir beschränken uns zuerst auf diesen Fall.

Man sieht leicht, dass dieselben Methoden auch für die Copierung eines Widerstandes angewandt werden.

I. Widerstandsbestimmung durch Substitution; nach dem Satze: zwei Widerstände sind einander gleich, wenn sie, einzeln in denselben Stromkreis eingeschaltet, die gleiche Stromstärke geben. Man stelle also einen Stromkreis her, bestehend aus der galvanischen Säule *E*, dem Galvanometer *G*, dem Rheostaten *R*. Der zu bestimmende Widerstand *W* ist in der Zeichnung eingeschaltet, kann aber, durch Herstellung einer Nebenschliessung ohne merklichen Widerstand, ausgeschaltet werden. Zuerst wird die Einstellung der Galvanometernadel beobachtet, während *W* und eventuell so viel Rheostatendraht eingeschaltet ist, dass die Nadelablenkung eine schickliche Grösse hat. Dann wird *W* ausgeschaltet. Die Menge Rheostatenwiderstand, welche statt dessen eingeschaltet werden muss, um die Nadel auf dieselbe Einstellung zurückzuführen, ist gleich dem gesuchten Widerstand *W*.

Fig. 12.



Wenn der Rheostat nicht Widerstände in beliebig kleinen Intervallen herzustellen erlaubt, sondern, wie z. B. die Siemens'sche Widerstandsscale mit Stöpselvorrichtung, nur sprung-

weise verschiedene, so bedient man sich eines dem in (7) S. 29 ähnlichen Interpolationsverfahrens. Man beobachtet die Nadeleinstellungen bei dem nächst kleineren und dem nächst grösseren Widerstand des Rheostaten. Sind die Unterschiede des Ausschlages klein, so kann man Proportionalität zwischen Vergrösserung des Widerstandes und Verringerung des Ausschlages annehmen. Ist also die Einstellung der Nadel beobachtet

α bei dem gesuchten Widerstand W
α_1 „ „ Rheostatenwiderstand w_1
α_2 „ „ „ „ w_2,

so ist

$$W = w_1 + (w_2 - w_1)\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

An Genauigkeit und Kürze dürfte dieses Interpolationsverfahren immer vorzuziehen sein.

Beispiel:

Eingeschaltet	W	Rh. 14	Rh. 15
Nadel-Einstellung	45,3	47,9	44,5

also $W = 14 + \frac{47{,}9-45{,}3}{47{,}9-44{,}5} = 14{,}76.$

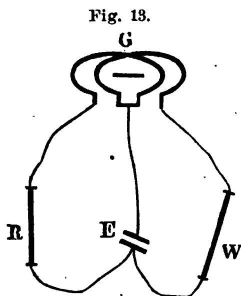
Die Methode ist auf nicht zu kleine Widerstände fast allgemein anwendbar und erfordert, da es sich nur um Prüfung der Gleichheit zweier Ströme handelt, nur ein Galvanoskop. Verlangt ist aber eine constante Säule. Etwaige kleine Veränderungen derselben lassen sich durch passende Wiederholung der Beobachtung und Mittelnehmen eliminiren, werden auch durch rasche Beobachtung verringert. Es ist also gut, sich vor der eigentlichen Messung ungefähr über den Betrag von W zu orientiren.

II. Durch einfache Stromverzweigung mit dem Differentialmultiplicator; nach dem Satze: die Widerstände zweier Leiter sind gleich, wenn sie, als Zweig-Leitungen neben einander in einen Stromkreis eingeschaltet, den Strom in zwei Theile von gleicher Stärke spalten (62 Nr. 6). Ob zwei Ströme einander gleich sind, wird mittels des Differentialmultiplicators untersucht, welcher aus zwei gleich langen, mit einander aufgewundenen Drähten besteht. Leitet man durch den einen Draht den einen der Ströme, durch den zweiten den anderen Strom in entgegengesetzter Richtung, so heben

sich die Wirkungen auf die im Inneren befindliche Magnetnadel im Falle der Gleichheit beider Stromstärken auf. Man erkennt also die Gleichheit zweier Ströme daran, dass die Nadel keine Ablenkung erfährt.

Die Verbindungen zum Zwecke der Widerstandsbestimmung zeigt die Figur. Bei *G* sind schematisch die beiden Drahtwindungen des Differentialgalvanometers mit ihren Endpuncten angegeben. In die beiden mittleren Enden verzweigt sich der Strom der Säule *E*, so dass die Zweigströme die Windungen in entgegengesetzter Richtung durchfliessen. Von den anderen Enden aus ist der eine Zweigstrom durch den zu bestimmenden Widerstand *W*, der andere durch den Rheostaten *R* geführt, worauf beide sich am anderen Pol der Säule wieder vereinigen. Die Verbindungsdrähte nach *W* und diejenigen nach *R* sollen gleichen Widerstand haben.

Fig. 13.



Die Menge Rheostatenwiderstand, welche man einschalten muss, um die Galvanometernadel auf die ohne Strom eingenommene Stellung zu bringen, ist gleich dem Widerstande *W*, wobei das Interpolationsverfahren von vor. S. in Anwendung kommen kann.

Prüfung des Differentialgalvanometers. Bei diesem Verfahren sind zweierlei Eigenschaften des Differentialgalvanometers vorausgesetzt: erstens, dass die Stromstärken gleich sind, wenn die Nadel keinen Ausschlag giebt. Diese Eigenschaft prüft man, indem man einen und denselben Strom durch beide Windungen hinter einander leitet, d. h. (von links nach rechts gezählt) die Drahtenden Nr. 1 und 2 mit einander, Nr. 3 und 4 je mit einem Pole der Säule verbindet. Die Nadel muss dann ruhig bleiben. Zweitens wird vorausgesetzt, dass der Widerstand der beiden Windungen gleich ist. Die vorige Bedingung als erfüllt angenommen, prüft man die letztere, indem man den Strom einer Säule sich nach dem in der Zeichnung gegebenen Schema aber ohne die Einschaltung von Widerständen nur durch die beiden Windungen verzweigen lässt. Die Nadel muss alsdann in Ruhe bleiben. Etwaige Correctionen des Instrumentes sind in der obigen Reihenfolge zu machen.

Uebrigens stellt man sich leicht von der genauen Erfüllung dieser Anforderungen unabhängig, indem man *W* und *R* mit einem Commutator verbindet, welcher sie leicht mit einander vertauschen lässt. *W* und *R* sind gleich, wenn bei der Vertauschung die Nadel ihre Einstellung nicht ändert.

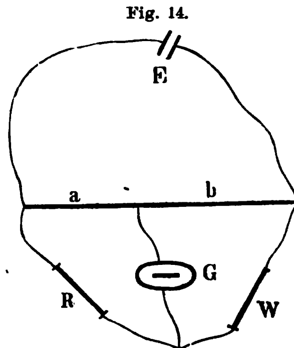
Vortheile der Methode sind ihre Empfindlichkeit und die Unabhängigkeit von der Constanz eines Elementes.

III. Durch doppelte Stromverzweigung mit der Wheatstone'schen Brücke; nach dem Satze, dass bei der in der Figur gezeichneten Stromverzweigung in dem Zweige *G*, in der „Brücke", die Stromstärke Null ist, wenn die Widerstände sich verhalten

$$a:b = R:W.$$

Sind also *a* und *b* zwei Leiter von gleichem Widerstande, ist unter *R* der Rheostat, unter *W* der zu bestimmende Widerstand verstanden, ist ferner bei *E* eine Säule, bei *G* ein Galvanoskop eingeschaltet, so wird *W* durch denjenigen Rheostatenwiderstand gegeben, welchen man einschalten muss, damit die Nadel in *G* keine Ablenkung erfährt.

Fig. 14.



Man kann die Anordnung der Widerstände auch so abändern, dass in den Zweigen *a* und *R* die als gleich bekannten, in *b* und *W* die zu vergleichenden Widerstände sich befinden.

Von der hier vorausgesetzten Gleichheit der Widerstände *a* und *b* macht wieder das schon unter II. beschriebene Verfahren unabhängig: Die Widerstände *W* und *R* sind gleich, wenn bei ihrer Vertauschung die Nadel des Galvanoskopes ihren Stand nicht ändert. — Ueber Wahl der Verbindungsdrähte, Interpolationsverfahren und Vortheile der Methode gilt ebenfalls das unter II. Gesagte.

70. Vergleichung ungleicher Widerstände.

Hierher gehört z. B. die Aufgabe, einen Widerstand zu bestimmen, wenn nicht ein Rheostat gegeben ist, sondern

nur die Einheit, in welcher der Widerstand ausgedrückt werden soll.

I. Mit dem Galvanometer. (Tangenten-, Sinus-, oder Spiegelbussole.) Man stellt einen Stromkreis aus dem Galvanometer und einer constanten Säule, wenn nöthig mit noch einem Ballast von Widerstand, her und misst die Stromstärke; sie sei i.

Dann schaltet man den einen der Widerstände, wir nennen ihn w_1, ein und misst die Stromstärke wiederum; sie sei i_1.

Man schaltet statt w_1 den anderen Widerstand w_2 ein; die Stromstärke sei i_2.

Das gesuchte Verhältniss der Widerstände wird alsdann berechnet

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{i - i_1}{i - i_2} \frac{i_2}{i_1}.$$

Für i, i_1, i_2 werden natürlich die Tangenten resp. Sinus der entsprechenden Ablenkungswinkel gesetzt.

Die Methode führt selten zu genauen Resultaten, da die elektromotorische Kraft fast aller Elemente von der Stromstärke abhängig ist. Ferner führt sie die von der Nothwendigkeit einer wirklichen Strommessung herrührenden Schwierigkeiten (**63. 64**) mit sich. Sie ist um so weniger genau, je ungleicher die zu vergleichenden Widerstände sind, und im Allgemeinen je kleiner dieselben sind.

Obige Gleichung folgt aus der Proportion (**62.** 6) $i : i_1 : i_2 = \frac{1}{w} : \frac{1}{w + w_1} : \frac{1}{w + w_2}$, wo w der Widerstand bei der Stromstärke i ist.

Beispiel: Die an einer Tangentenbussole beobachteten Ausschläge waren, wenn eingeschaltet war

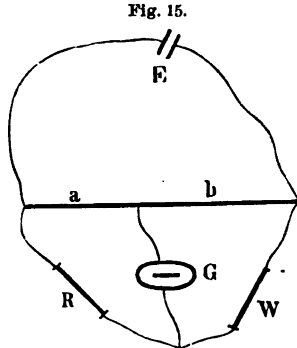
der Widerstand Null	66°,8	tang =	2,333
der zu bestimmende Widerstand w_1	23°,9	„	0,443
eine Siemens'sche Quecksilbereinheit	43°,6	„	0,952.

Hiernach ist $w_1 = \frac{2{,}333 - 0{,}443}{2{,}333 - 0{,}952} \cdot \frac{0{,}952}{0{,}443} = 2{,}94$ Siem.

II. Mittels der Wheatstone'schen Brücke. In der Zeichnung sollen a und b zwei Widerstände bedeuten, deren Verhältniss man beliebig ändern kann. Diess ist z. B. der Fall, wenn a und b zusammen aus einem ausgespannten (Platin-) Draht von überall gleichem Durchmesser bestehen, bei welchem man die Widerstände der Länge proportional setzen kann. An

dem Drahte ist ein (Platin-)Contact verschiebbar, von welchem die Leitung nach dem Galvanoskop geführt ist. Ebenso ist es der Fall, wenn b ein Rheostat, a ein in Rheostateneinheiten bekannter Widerstand ist.

Fig. 15.

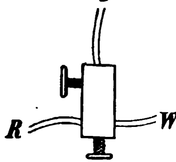


Die beiden zu vergleichenden Widerstände werden bei W und R eingeschaltet, alsdann durch Probiren dasjenige Verhältniss zwischen a und b gesucht, bei welchem das Galvanoskop G keinen Strom anzeigt. Dann ist

$$\frac{W}{R} = \frac{b}{a}.$$

Die Verbindungsdrähte von R und W haben keinen Einfluss, wenn sich ihre Widerstände wie R:W verhalten. Daher bestimmt man zunächst letzteres Verhältniss durch einen Vorversuch annähernd und gleicht dann die beiderseitigen Gesammtlängen der Drähte (von derselben Sorte) nach diesem Verhältniss ab. Bequem ist es hierfür, R und W durch einen Draht zu verbinden und die Ableitung nach G mittels einer verschiebbaren Klemme vorzunehmen.

Fig. 16.



Wie im vor. Art. Nr. III kann man auch den Ort von b und R vertauschen.

III. Aus der Dämpfung einer schwingenden Magnetnadel (**50**). Eine innerhalb eines geschlossenen Multiplicators schwingende Magnetnadel inducirt durch ihre Bewegung Ströme in demselben, welche auf die Bewegung verzögernd wirken. Die hierdurch erfolgende Abnahme der Schwingungsbogen ist ausser von der Nadel selbst und von der Gestalt und Windungszahl des Multiplicators nur von dem Gesammtwiderstande $w_0 + w$ des Multiplicators und des Schliessungsdrahtes abhängig. Die Theorie zeigt, dass das logarithmische Decrement der Schwingungsbogen (**50**) mit $w_0 + w$ umgekehrt proportional ist.

w_1 und w_2 mögen die zu vergleichenden Widerstände bedeuten. Beobachtet man also die logarithmischen Decremente λ_0, wenn der Multiplicator, dessen Widerstand wir durch w_0

bezeichnen, durch einen Draht ohne merklichen Widerstand geschlossen ist,

λ_1, wenn er durch den Widerstand w_1 geschlossen ist,

λ_2, wenn er durch w_2 geschlossen ist,

λ' bei geöffnetem Multiplicator, also durch den mechanischen Luftwiderstand,

so ist

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_2} \frac{\lambda_2 - \lambda'}{\lambda_1 - \lambda'}.$$

Auch hat man

$$w_1 = w_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda'},$$

wonach man einen Widerstand mit demjenigen des Multiplicators vergleichen, also, wenn letzterer bekannt ist, messen kann.

Die Methode ist auf kleine Widerstände beschränkt, weil die Dämpfung bei grösserem Widerstande zu schwach wird um genau gemessen zu werden.

Man kann die Schwingungsdauer und die Dämpfung dadurch vergrössern, dass man ein astatisches Nadelpaar anwendet, oder durch die Annäherung eines Magnets, welcher die Directionskraft des Erdmagnetismus abschwächt. Natürlich muss derselbe bei allen vier Beobachtungen dieselbe Lage haben. — Vgl. Pogg. Ann. Bd. 142, S. 430.

Die obigen Formeln folgen ohne Weiteres aus der Beziehung

$$(\lambda_0 - \lambda') : (\lambda_1 - \lambda') : (\lambda_2 - \lambda') = \frac{1}{w_0} : \frac{1}{w_0 + w_1} : \frac{1}{w_0 + w_2}.$$

Beispiel. Es wurde beobachtet

bei geöffnetem Multiplicator	$\lambda' = 0{,}0025$
bei in sich geschlossenem Multiplicator	$\lambda_0 = 0{,}1435$
bei Schliessung durch 1 Siem.	$\lambda_2 = 0{,}0612$
bei Schliessung durch den zu bestimmenden Widerstand w_1	$\lambda_1 = 0{,}0978.$

Also ist

$$w_1 = 1 . \frac{0{,}1435 - 0{,}0978}{0{,}1435 - 0{,}0612} . \frac{0{,}0612 - 0{,}0025}{0{,}0978 - 0{,}0025} = 0{,}342 \text{ Siem.}$$

Der Multiplicatorwiderstand ist

$$w_0 = 1 . \frac{0{,}0612 - 0{,}0025}{0{,}1435 - 0{,}0612} = 0{,}713 \text{ Siem.}$$

71. Widerstandsbestimmung eines zersetzbaren Leiters.

Soll der Widerstand einer Flüssigkeit bestimmt werden, welche durch den Strom zersetzt wird, so muss Rücksicht auf die an den Elektroden auftretenden elektromotorischen Kräfte der Polarisation genommen werden. Am einfachsten ist die Substitutionsmethode (**69**) in folgender modificirten Gestalt. Die Flüssigkeit wird in einem parallelepipedischen Trog vorausgesetzt, dessen Querschnitt die Elektroden ausfüllen. Sie wird mit einem Rheostaten, einem Galvanoskop und einer galvanischen Säule zu einem einfachen Stromkreis geschlossen.

Nun beobachtet man die Nadeleinstellung, wenn so viel von der Flüssigkeitssäule (eventuell noch ein Ballast von Rheostatenwiderstand) eingeschaltet ist, dass der Nadelausschlag eine schickliche Grösse hat, dann nähere man die eine Elektrode der anderen um die Länge l und schalte soviel Rheostatenwiderstand w ein, dass dieselbe Nadeleinstellung entsteht. w ist dann der Widerstand der zwischen den beiden Stellungen der verschobenen Elektrode liegenden Flüssigkeitssäule. Ist w in Siemens'schen Einheiten gegeben, so erhalten wir den specifischen Leitungswiderstand k (**62**) der Flüssigkeit, bezogen auf Quecksilber, als $k = \frac{wq}{l}$, wo q den Querschnitt in $\square^{mm}$, l die Länge in Metern bedeutet.

Grosse Genauigkeit ist hier, wenn die Zersetzung von einer Gasentwickelung begleitet ist, nicht zu erwarten. Man wiederhole daher die Versuche einigemal.

72. Bestimmung des Widerstandes einer galvanischen Säule.

I. Man schliesse die zu untersuchende Säule durch ein Galvanometer, wobei man eventuell so viel Widerstand einschaltet, dass der Nadelausschlag eine schickliche Grösse erhält, und beobachte die Stromstärke. Dieselbe sei J.

Dann wird in denselben Stromkreis ein bekannter Widerstand w (Rheostat) eingeschaltet; am vortheilhaftesten so viel, dass die neue Stromstärke ungefähr halb so gross wird. Dieselbe werde mit i bezeichnet.

Aus diesen beiden Beobachtungen ergibt sich der Widerstand W des Stromkreises bei der ersten Beobachtung

$$W = w \frac{i}{J - i}.$$

Von der so berechneten Zahl W zieht man den Widerstand des Galvanometers, welcher natürlich anderweitig ermittelt sein muss, so wie eventuell den bei dem ersten Versuch eingeschalteten sonstigen Widerstand ab und erhält so den Widerstand der Säule allein.

Für die Genauigkeit des Resultates bestehen die unter **70** Nr. 1 aufgezählten Schwierigkeiten, welche besonders empfindlich werden, wenn der zu messende Widerstand der Säule klein ist.

Beispiel: Der Widerstand der Säule aus sechs Meidinger'schen Elementen war zu untersuchen. Die Widerstände der Tangentenbussole und der Verbindungsdrähte konnten vernachlässigt werden. An der Tangentenbussole wurde beobachtet, als eingeschaltet war der

Widerstand	50	Siem.	die Ablenkung	$55^0,7$	tang =	1,466,
„	130	„	„ „	$38^0,9$	„	0,807.

Hiernach ist, wenn wir den Widerstand der Säule mit W_0 bezeichnen,

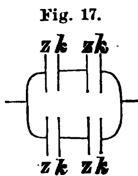
$$W_0 + 50 = (130 - 50) \frac{0,807}{1,466 - 0,807} = 98,0 \text{ Siem.}$$

Also der Widerstand der Säule allein $W_0 = 48,0$ Siem.

II. Mit einem Galvanoskop von bekanntem oder zu vernachlässigendem Widerstande und mit einem Rheostat kann man den Widerstand einer galvanischen Säule von einer geraden Anzahl gleicher Becher folgendermassen bestimmen. Man stellt einen Stromkreis her und beobachtet die Einstellung der Nadel, wobei eine angemessene Menge Rheostatenwiderstand eingeschaltet wird. w_1 möge der Gesammtwiderstand (Galvanoskop + Rheostat + Verbindungsdrähte) ausser dem der Säule sein.

Zweitens schalte man die Becher paarweise nebeneinander, die Zinke alle nach derselben Seite gerichtet, wie für eine Säule von vier Elementen nebenstehend gezeichnet ist, so wird im Allgemeinen ein anderer Rheostatenwiderstand nothwendig sein, um den früheren Nadelausschlag hervorzubringen. Nennen wir w_2 den Gesammtwiderstand ausser

Fig. 17.



dem der Säule in diesem zweiten Falle. Dann ist der Widerstand w der Säule bei dem ersten Versuch

$$w = 4w_2 - 2w_1.$$

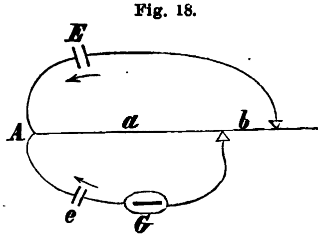
Denn, wenn e die elektromotorische Kraft der Säule im ersten Falle, so ist $\frac{1}{2}e$ diejenige im zweiten. Der Widerstand der Säule im zweiten Falle ist $\frac{1}{4}w$. Man hat also, da die Stromstärken gleich sind, $\frac{e}{w + w_1} = \frac{\frac{1}{2}e}{\frac{1}{4}w + w_2}$, oder $w = 4w_2 - 2w_1$.

Auch diess Verfahren ist nur auf sehr constante Säulen von nicht zu kleinem Widerstande anwendbar.

III. Das einzig mögliche Verfahren, kleine Widerstände einer nicht ganz constanten Säule zu messen, besteht darin, dieselbe nur momentan zu schliessen. Dabei ist die Messung von Stromstärken unmöglich, wesswegen die Bestimmung auf die Prüfung der Stromstärke Null zurückgeführt werden muss. Diess geschieht in folgender Methode (Beetz, Pogg. Ann. Bd. 142, S. 573).

Ab ist ein ausgespannter dünner Platindraht von bekanntem Widerstand, auf welchem sich zwei Contacte verschieben lassen. E ist die Säule, deren Widerstand W (wobei wir den nachher abzuziehenden Widerstand der Verbindungsdrähte einbegreifen) bestimmt werden soll. e ist eine andere Säule von geringerer elektromotorischer Kraft als E. Die Säulen müssen nach A gleichnamige Pole richten. Nun werden die Contacte so gestellt, dass in dem Galvanoskop G kein Strom ist. Bezeichnen wir die Widerstände der beiden hierbei eingeschalteten Stücke Platindraht durch a und b.

Fig. 18.



Darauf ändern wir beide Stücke in a' und b', so dass wieder kein Strom in G vorhanden ist, so wird W gefunden

$$W = \frac{a'b - ab'}{a - a'}.$$

Beweis. Da der Strom in dem Zweige Ge Null ist, so wird der Kreis $AabE$ überall von dem gleichen Strome durchflossen. Nennen wir diesen i, so ist (62, II) $E = (W + a + b)i$. Ferner ist (s. ebd.) $e = ai$,

also durch Division $\frac{E}{e} = \frac{W+b}{a} + 1$. Ebenso ist $\frac{E}{e} = \frac{W+b'}{a'} + 1$; also $\frac{W+b'}{a'} = \frac{W+b}{a}$ oder $W = \frac{a'b - ab'}{a - a'}$.

Der Zweck des Verfahrens, ein nur momentaner Schluss der Säule, wird erreicht, indem man die Verbindungen bei *A* nur sehr kurze Zeit bestehen lässt. Z. B. wird das Ende des Platindrahtes mit einem Quecksilbernapf verbunden, von *E* und *G* kommen zwei besponnene, an einander befestigte Drähte, deren Enden amalgamirt werden, und die man nur momentan ins Quecksilber taucht. Damit nicht der Strom von *e* allein geschlossen und dadurch ein Ausschlag des Galvanometers hervorgebracht wird, lässt man das von *E* kommende Drahtende ein wenig vor dem anderen vorstehen.

Man sieht aus Obigem, dass *a* mindestens $= W \frac{e}{E - e}$ sein muss, damit der Strom Null werden kann. Zeigt sich also bei dem Versuch, dass keine Stellung der Contacte genügt, so muss eine schwächere Hülfssäule genommen oder der disponible Widerstand vermehrt werden.

73. Vergleichung zweier elektromotorischer Kräfte.

Um elektromotorische Kräfte zu messen, kann man diejenige eines bekannten constanten Elementes als Einheit wählen, z. B. wie gewöhnlich geschieht, die des Daniell'schen Elementes (Kupfer, Kupfervitriol, Schwefelsäure, Zink). In diesem Falle reducirt sich also die Messung einer elektromotorischen Kraft auf die Bestimmung ihres Verhältnisses zu einer anderen.

I. Vergleichung durch Galvanoskop und Rheostat. Man bilde einen Stromkreis, bestehend aus einem Rheostaten, einem Galvanoskop und der einen elektromotorischen Kraft, welche wir *E* nennen. Wenn nöthig, schalte man so viel Rheostatenwiderstand ein, dass der Nadelausschlag eine passende Grösse erhält.

Dann wird die andere elektromotorische Kraft *e* anstatt der ersteren eingeschaltet und mittels des Rheostaten der Strom auf die frühere Stärke gebracht.

Nennt man den gesammten Widerstand bei dem ersten Versuch W, bei dem zweiten w, so ist

$$\frac{E}{e} = \frac{W}{w}.$$

W und w setzen sich aus dem jedesmaligen Rheostatenwiderstande und dem Widerstande der übrigen Kette zusammen. Insbesondere ist auch der Widerstand der galvanischen Säulen selbst darin enthalten; derselbe müsste also nach vor. Art. bestimmt werden. Nimmt man aber die Widerstände des Rheostaten sehr gross gegen die übrigen Theile, was durch die Anwendung eines empfindlichen Galvanoskopes immer ermöglicht wird, so kann man die letzteren vernachlässigen, oder es genügt doch eine rohe Schätzung. In diesem Falle ist die Methode sehr bequem und einfach.

II. Vergleichung durch das Galvanometer. Erzeugen zwei elektromotorische Kräfte E und e in Stromkreisen vom Widerstand W und w die Stromstärke J und i, so ist

$$\frac{E}{e} = \frac{J.W}{i.w}.$$

Wie man hiernach mit Hülfe eines Galvanometers das Verhältniss $\frac{E}{e}$ bestimmt, ist ohne Weiteres klar. Indessen würde die Messung von Widerständen, insbesondere auch von denen der galvanischen Säulen selbst, nothwendig sein.

Sehr einfach und von jeder Widerstandsmessung unabhängig aber wird das Verfahren, wenn man den bei beiden Versuchen ungeänderten Theil des Widerstandes sehr gross gegen denjenigen der zu vergleichenden galvanischen Säulen macht, so dass der letztere vernachlässigt werden kann. Sind dann die Stromstärken resp. J und i, so ist einfach

$$\frac{E}{e} = \frac{J}{i}.$$

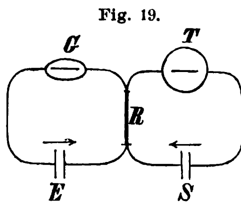
Zur Ausführung gehört also nur ein empfindliches Galvanometer (Tangenten- oder Sinusbussole mit vielen Umwindungen, oder ein Galvanometer mit Spiegelablesung; (**65**)) und irgend ein einzuschaltender hinlänglich grosser Widerstand.

III. Vergleichung nach der Compensationsmethode. Bei einem inconstanten Element, dessen elektromo-

torische Kraft durch den Strom selbst geschwächt wird, ist das einzig anwendbare Verfahren, es zu compensiren, d. h. den Strom in ihm selbst nicht zu Stande kommen zu lassen. Eine zur Ausführung bequeme Form (Poggendorff), weil dabei kein Widerstand einer Säule gemessen zu werden braucht, setzt ein Galvanoskop G, ein Galvanometer T und einen Rheostaten R voraus. Ausserdem wird eine constante Hülfssäule S verlangt, deren elektromotorische Kraft grösser ist, als jede der zu vergleichenden elektromotorischen Kräfte.

Die Anordnung des Versuches siehe in der Zeichnung. In dem linken Zweig der Leitung ist das Galvanoskop G und eine der zu vergleichenden elektromotorischen Kräfte E enthalten, in dem rechten die Hülfssäule S und das Galvanometer T. E und S sind so aufgestellt, dass sie ihre gleichnamigen Pole einander zuwenden. In dem mittleren Theile der Leitung, welcher mit beiden genannten in Verbindung steht, ist ein Rheostat R enthalten.

Fig. 19.



In dem Rheostaten wird nun durch Probiren so viel Widerstand W eingeschaltet, dass der Strom im Zweige EG verschwindet. Dann wird die Stromstärke J in T beobachtet.

Jetzt schaltet man an die Stelle von E die andere elektromotorische Kraft e ein, bringt wie vorhin mit dem Rheostaten den Strom in G auf Null und beobachtet die Stromstärke in T. Sie sei i, während W der Widerstand in R ist.

Dann findet sich das Verhältniss der beiden elektromotorischen Kräfte

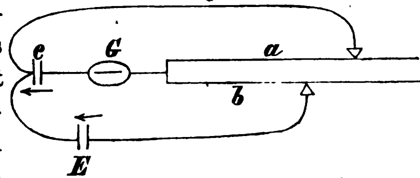
$$\frac{E}{e} = \frac{JW}{iw}.$$

$E = JW$ ergibt sich sofort aus 62, II, da der Strom im Zweige GE Null ist.

Unter Umständen kann man die Verhältnisse für den Versuch bequemer machen durch Einschalten von Widerständen auch im Zweige S. Dadurch nämlich wird erstens bewirkt, dass im Rheostaten ein grösserer Widerstand eingeschaltet werden muss, damit der Strom in G verschwindet, und zweitens, dass der Strom in T schwächer wird.

IV. Compensationsmethode nach Bosscha. Zwei Rheostaten (ausgespannte Platindrähte) und ein Galvanoskop genügen bei nebenstehender Anordnung, um die elektromotorische Kraft e eines inconstanten Elementes mit derjenigen E eines stärkeren constanten Elementes zu vergleichen. a und b seien die Stücke der Rheostaten, welche bei der Anordnung der Figur von den mit einander verbundenen Enden derselben bis zu den verschiebbaren Contacten liegen müssen, damit das Galvanoskop G keinen Strom anzeigt. Bei einem zweiten Versuch mögen a' und b' dieser Anforderung genügen. Dann ist

Fig. 20.



$$\frac{E}{e} = 1 + \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Der Beweis ergibt sich wie (72), III.

V. Auch bei den Versuchen (72), III. wird das Verhältniss der elektromotorischen Kräfte $\frac{E}{e} = 1 + \frac{b - b'}{a - a'}$ gefunden.

VI. Ist ebendort der Widerstand W der Säule E nebst Verbindungsdrähten bekannt, so ist $\frac{e}{E} = \frac{a}{W + a + b}$. (Dubois-Reymond.)

74. Bestimmung einer elektromotorischen Kraft nach absolutem Maafse.

Anstatt eine elektromotorische Kraft dadurch zu definiren, dass man sie mit einer anderen bekannten vergleicht, kann man sie nach dem Ohm'schen Gesetz (62, Nr. 4) auf Stromstärke und Widerstand zurückführen. Als Einheit gilt dann diejenige elektromotorische Kraft, welche in einer Schliessung vom Widerstande Eins den Strom Eins hervorbringt. Allgemein, wenn eine elektromotorische Kraft E in einer Schliessung vom Widerstande W (etwa Siemens'schen Quecksilbereinheiten S. 145) den Strom J (etwa nach magnetischem Maafse S. 151) erzeugt, so ist

$$E = WJ.$$

Natürlich muss angegeben werden, nach welchen Ein-

heiten Widerstand und Stromstärke gemessen sind. Z. B. kann man kurz sagen: die elektromotorische Kraft eines Grove'schen Elementes ist = 20 Siem.Weber. (**62**).

Eine solche Bestimmung wird durch die Combinationen unter II und III (vor. Art.) geleistet, sobald man nicht nur relative sondern absolute Stromstärken (**66**) misst.

I. Ohm'sche Methode. Die Stromquelle, deren elektromotorische Kraft gemessen werden soll, wird mit einem Rheostaten und einer Tangentenbussole zum Stromkreise zusammengefügt. Es werde beobachtet

die Stromstärke J bei eingeschaltetem Rheostatenwiderstande W,

die Stromstärke i bei eingeschaltetem Rheostatenwiderstande w.

Dann ist

$$E = J i \frac{w - W}{J - i}.$$

Für die Genauigkeit des Resultates ist es zuträglich, den Unterschied der Widerstände so zu wählen, dass der Strom bei dem einen Versuche ungefähr die Hälfte des anderen ist. Die Abweichung der Ausschläge vom Tangentengesetz (**63**) wird aufgehoben, wenn die beiden Ausschlagswinkel zusammen $= 90^0$ sind. Man nehme also nahezu den einen Ausschlag $= 35^0$, den andern $= 55^0$, so wird zugleich die Vorschrift erfüllt, dass die Ausschläge sich nicht weit von 45^0 entfernen.

Die Methode ist selbstverständlich auf „constante" Elemente beschränkt, wobei übrigens zu beachten, dass bei starken Strömen die elektromotorische Kraft aller Säulen abnimmt.

Beispiel. Die elektromotorische Kraft eines Grove'schen Elementes sollte in Quecksilbereinheiten und nach magnetischem Strommaasse gemessen werden. Es wurde die Tangentenbussole benutzt, deren Reductionsfactor auf magnetisches Strommaass S. 152 gleich 1,645 berechnet ist. Man erhielt, als eingeschaltet war der Widerstand

$W = 10$ Siem. den Ausschlag $47^0{,}30$ tang = 1,0837
$w = 20$ „ „ „ $29^0{,}20$ „ 0,5589.

Die beiden Stromstärken nach magnetischem Maasse sind also

$$J = 1{,}645 . 1{,}0837 = 1{,}7827 \qquad i = 1{,}645 . 0{,}5589 = 0{,}9194,$$

woraus die gesuchte elektromotorische Kraft E folgt

$$E = 1{,}7827 . 0{,}9194 . \frac{20 - 10}{1{,}7827 - 0{,}9194} = 18{,}98 \text{ Siem.Web.}$$

Die mit der obigen identische Formel $E = C.\frac{w - W}{\text{ctg}\,\varphi - \text{ctg}\,\Phi}$, worin C den Reductionsfactor bezeichnet, ist zur Rechnung bequemer.

II. Poggendorff'sche Methode nach der in der Figur S. 170 dargestellten Combination. Ist durch Einschaltung des Widerstandes W im Rheostaten R der Strom im Galvanoskop G auf Null gebracht, ist alsdann J die Stromstärke in T, so ist die elektromotorische Kraft der Säule E

$$E = WJ.$$

Die Methode ist allgemein anwendbar. Vgl. übrigens die S. 170. 171 gegebenen Vorschriften.

75. Bestimmung der erdmagnetischen Horizontalintensität auf galvanischem Wege.

Wie man mit einer Tangentenbussole von bekannten Dimensionen galvanische Ströme nach absolutem Maasse messen kann, wenn die Horizontalintensität des Erdmagnetismus bekannt ist (66), so kann man die letztere umgekehrt mit der Tangentenbussole bestimmen, wenn man ihren Ablenkungswinkel durch einen Strom beobachtet, dessen absolute Stärke anderweitig bekannt ist.

I. Mit dem Voltameter.

Wir lassen einen und denselben Strom durch eine Tangentenbussole und ein Voltameter gehen, beobachten den Ablenkungswinkel φ der Nadel und die in einer Minute ausgeschiedene Menge m der elektrolytischen Bestandtheile unter Berücksichtigung der auf S. 151—155 gegebenen Vorschriften. Nennen wir r den mittleren Halbmesser und n die Anzahl der Windungen der Tangentenbussole, bezeichnen wir ferner durch A die in Tab. 25, letzte Spalte, für das betreffende Voltameter gegebene Zahl, so ist die horizontale Intensität T des Erdmagnetismus

$$T = \frac{2n\pi . A}{r} \frac{m}{\text{tang}\,\varphi}.$$

Einerseits nämlich ist die Stromstärke $i = A.m$ (S. 155), anderseits $i = \frac{rT}{2n\pi}\,\text{tang}\,\varphi$ (S. 151). Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke entsteht die Formel.

Falls die Nadel und die Dimensionen des Multiplicator-Querschnittes nicht sehr klein gegen den Windungsdurchmesser sind, hat man noch in den Nenner zu setzen

$$\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}-\tfrac{1}{3}\frac{b^2}{r^2}-\tfrac{3}{4}\frac{l^2}{r^2}\right)\left(1+\tfrac{15}{4}\frac{l^2}{r^2}\sin^2\varphi\right),$$

wobei wir betreffs der Bedeutung von a, b und l auf S. 152 verweisen.

II. Mit dem Bifilargalvanometer.

Unter Bifilargalvanometer verstehen wir einen Multiplicator, der an zwei Drähten aufgehangen ist, welche zugleich die Zuleitung des Stromes besorgen. Das Instrument ist so orientirt, dass die Ebene der Windungen sich vermöge der Directionskraft der Aufhängefäden im magnetischen Meridian befindet. Geht ein Strom hindurch, so suchen die Kräfte des Erdmagnetismus auf denselben die Windungsebene senkrecht zum magnetischen Meridian zu stellen, mit einer Directionskraft, welche der von den Stromwindungen umschlossenen Fläche f, der Stromstärke i und der Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus proportional ist. Vgl. den Anhang.

Die Directionskraft D der Aufhängedrähte, welche der Ablenkung entgegenwirkt, wird durch das auf den verticalen Durchmesser bezogene Trägheitsmoment K (**53**) und die Schwingungsdauer t (**51**) des Bifilargalvanometers (ohne Strom) gefunden

$$D=\frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Dann ist also, wenn α den Ablenkungswinkel durch den Strom i bedeutet,

$$i=\frac{D}{fT}\operatorname{tang}\alpha=\frac{\pi^2 K}{t^2 fT}\operatorname{tang}\alpha.$$

Wenn nun derselbe Strom an einer Tangentenbussole von der Windungszahl n und dem mittleren Halbmesser r der Windungen (vgl. übrigens S. 152) den Ausschlag φ hervorbringt, so ist

$$i=\frac{rT}{2n\pi}\operatorname{tang}\varphi.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke kommt

$$T=\sqrt{\frac{\pi^2 K}{t^2 f}\cdot\frac{2n\pi}{r}\cdot\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi}}.$$

Ebenso lässt sich natürlich eine Stromstärke durch die an beiden Instrumenten gleichzeitig hervorgebrachten Ablenkungen nach absolutem magnetischen Maasse messen, denn durch Elimination von T entsteht

$$i = \sqrt{\frac{\pi^2 K}{t^2 f} \cdot \frac{r}{2 n \pi} \operatorname{tang} \alpha . \operatorname{tang} \varphi}.$$

Durch Anwendung eines Commutators, welcher den Strom in beiden Galvanometern umkehrt, wird eine mangelhafte Orientirung derselben compensirt (S. 147).

Ist die Nadel der Tangentenbussole an einem Faden vom Torsionsverhältniss Θ (**54**) aufgehangen, so wird überall $r(1 + \Theta)$ anstatt r gesetzt.

Die Ströme in den beiden Galvanometern dürfen gegenseitig keine ablenkenden Wirkungen ausüben.

Vgl. Pogg. Ann. Bd. 138, S. 1.

76. Die Multiplications- und die Zurückwerfungs-Methode bei der Messung kurz dauernder galvanischer Ströme. (Weber.)

Zur Messung kurz dauernder Wirkungen auf eine gedämpfte Magnetnadel (**50**), z. B. besonders zur Messung inducirter Ströme ist es oft zweckmässig, die Impulse regelmässig zu repetiren. Hierdurch entsteht wegen der Dämpfung schliesslich eine sich constant erhaltende Bewegung (gerade wie ein Uhrpendel, welches bei jeder Schwingung einen Impuls durch das treibende Gewicht erhält, aber durch Reibung und Luftwiderstand gedämpft wird, nach einer Reihe von Schwingungen eine constante Amplitude erhält). Dadurch, dass dieser Endzustand zur Beobachtung benutzt wird, gewinnt man den Vortheil, die Beobachtung beliebig oft wiederholen und einen genauen Mittelwerth nehmen zu können; ferner ist nicht nothwendig, dass die Nadel beim Beginn der Beobachtungen in Ruhe sei.

I. Multiplicationsmethode.

Das Verfahren ist dem eben gebrauchten Beispiel des Uhrpendels ganz analog. Man ertheilt der Nadel den Impuls; sie schwingt hinaus und kehrt zurück. Im Augenblicke, wo sie ihre Gleichgewichtslage rückwärts passirt, ertheilt man den

zweiten Impuls in entgegengesetzter Richtung wie den ersten, so dass er die Bewegung der Nadel vermehrt. Bei dem folgenden Durchgang durch die Gleichgewichtslage erfolge wieder ein Impuls im ersten Sinne, u. s. f. Die Schwingungen werden allmählich weiter, erreichen aber endlich eine Grösse, in welcher sie sich durch die fortgesetzten Impulse nur erhalten, und zwar wird diese Grenze desto rascher erreicht, je stärker die Dämpfung ist.

Setzen wir kleine Schwingungen voraus, welche mit Spiegel und Scale (**47**) beobachtet werden, so ist der Grenzbogen proportional dem Geschwindigkeitszuwachs durch den einzelnen Impuls, also z. B. proportional der bei einem kurz dauernden Strome durch den Multiplicator geflossenen Elektricitätsmenge. Meistens genügt diese Proportionalität, wie z. B. im folg. Art.

Man kann aber auch den Schwingungsbogen a, welchen die vorher ruhende Nadel durch einen einmaligen Impuls ohne alle Dämpfung erhalten hätte, aus dem durch Multiplication entstehenden Grenzbogen A berechnen, sobald das Dämpfungsverhältniss k, resp. das logarithmische Decrement $\lambda = \log k$ (**50**) bekannt ist. Die Theorie der schwingenden gedämpften Nadel zeigt nämlich, dass

$$a = A\left(1 - \frac{1}{k}\right) k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{2{,}3026 \,.\, \lambda}}.$$

($2{,}3026 \,.\, \lambda$ ist $= \log \text{nat}\, k$.) Für schwächere Dämpfung nähert sich das letzte Glied dem Werth $\sqrt{k}$, und man hat

$$a = A\,\frac{k-1}{\sqrt{k}}.$$

Die durch einen einmaligen Impuls der Nadel ertheilte Winkelgeschwindigkeit v ist, wenn t die Schwingungsdauer der Nadel bedeutet,

$$v = \frac{a}{2}\,\frac{\pi}{t}.$$

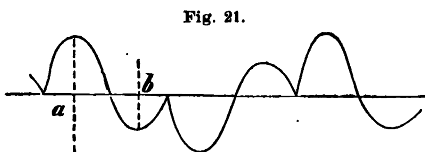
II. Zurückwerfungsmethode.

Dieses Verfahren, welches bei stärkeren Impulsen angewandt wird, liefert zugleich das Dämpfungsverhältniss der Nadel.

Man theilt einen Impuls mit, lässt die dadurch in Bewegung versetzte Nadel hinaus-, zurück-, nach der anderen

Seite hinaus-, und wieder zurückschwingen. In dem Augenblick, in welchem alsdann die Gleichgewichtslage (Scalentheil, welchen die ruhige Nadel einnahm) erreicht wird, theilt man den zweiten Impuls in entgegengesetzter Richtung wie den ersten mit. Dadurch wird die Nadel, da sie durch die Dämpfung Geschwindigkeit eingebüsst hat, zurückgeworfen. Nun lässt man sie abermals zweimal umkehren und wirft sie bei der nächsten Erreichung der Gleichgewichtslage wieder zurück, u. s. f. Nachdem dieses Verfahren einigemal wiederholt worden ist, nehmen die Ausschläge der Nadel einen constanten Werth an, und zwar um so rascher, je stärker die Dämpfung ist. Dann herrschen also periodische Schwingungen von der in beistehender Figur graphisch dargestellten Gestalt, wo die Zeiten als Abscissen, die Scalentheile, von der Ruhelage der Nadel an gerechnet, als Ordinaten gelten.

Fig. 21.



Die Herbeiführung dieses gleichförmigen Zustandes wird beschleunigt, wenn man den ersten Impuls abschwächt, und zwar um so mehr, je schwächer die Dämpfung ist. Wäre keine Dämpfung vorhanden, so müsste er, wie aus der Figur folgt, nur die Hälfte betragen.

Die Zurückwerfungsmethode liefert also, nachdem man den Mittelwerth aus je den entsprechenden Beobachtungen genommen hat, vier Umkehrpuncte auf der Scale. Die Differenz a der beiden äussern soll der grosse, die Differenz b der inneren Umkehrpuncte soll der kleine Schwingungsbogen heissen. S. d. Fig.

Zunächst ist offenbar das Dämpfungsverhältniss

$$k = \frac{a}{b}.$$

Die durch den einzelnen Impuls mitgetheilte Winkelgeschwindigkeit ist proportional mit

$$\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}},$$

wenn die Dämpfung klein oder nur um geringe Grössen ge-

ändert ist; wie z. B. bei Widerstandsvergleichungen (78). Andernfalls kommt noch der Factor $k^{-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{2,3026\,.\,\lambda}{\pi}}$ hinzu.

Um die Winkelgeschwindigkeit v selbst zu erhalten, muss ausserdem die Schwingungsdauer t der Nadel bekannt sein. Dann ist

$$v = \tfrac{1}{2}\,\frac{\pi}{t}\,\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}}\,k^{-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{2,3026\,.\,\lambda}{\pi}}.$$

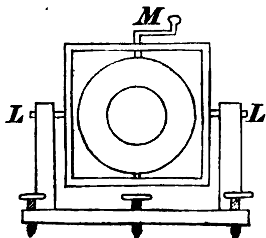
Vgl. über Multiplications- und Zurückwerfungsmethode: W. Weber, elektrodynamische Maafsbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. I. S. 341 ff.

Wenn die Schwingungsbogen so gross sind, dass Proportionalität zwischen Bogen und Scalenausschlägen nicht mehr stattfindet, so reducirt man nach (48), und zwar auf den Sinus des halben einseitigen Ausschlages, da diesem, wie bei dem Pendel, die Geschwindigkeit bei dem Durchgang durch die Gleichgewichtslage proportional ist. Von einem beobachteten Schwingungsbogen $= n$ Scalentheilen zieht man also die Grösse $\frac{11}{128}\,\frac{n^3}{r^2}$ ab, wo r den Abstand der Scale vom Spiegel bedeutet.

77. Bestimmung der erdmagnetischen Inclination mit dem Erdinductor. (Weber.).

Die Bestimmung beruht auf einer Vergleichung der durch die horizontale und die verticale Componente des Erdmagnetismus in demselben gedrehten Multiplicator (Inductor) inducirten Ströme. Da die Scalenausschläge des Galvanometers (wenn gross, auf den Sinus des halben einseitigen Ausschlagswinkels reducirt; vgl. vor. Art. am Schluss) den Stromstärken proportional sind, die letzteren aber der betreffenden erdmagnetischen Componente, so ergibt das Verhältniss der Scalenausschläge die Tangente des Inclinationswinkels.

Fig. 22.



Der Erdinductor besteht aus einem drehbaren Multiplicator, dessen Drehungsaxe M horizontal oder vertical gestellt werden kann. Ein „Inductionsstoss“ wird durch eine rasche Drehung um 180⁰ ausgeführt, wobei die Ebene der

Drahtwindungen vor und nach der Drehung senkrecht zu der betreffenden erdmagnetischen Componente sein soll.

Zur Messung der bei diesen Drehungen inducirten Ströme dient ein Galvanometer mit aufgehangener Nadel von einer Schwingungsdauer mindestens gleich 10 Secunden. Gewöhnlich wird ein astatisches Nadelpaar angewandt. Durch die enge Umgebung mit dem Multiplicator ist die Nadel gedämpft; genügt diese Dämpfung nicht, so verstärkt man sie durch eine in den Multiplicator eingeschobene Kupferhülse.

Zur Beobachtung wird in der Regel das Multiplicationsverfahren (76) gebraucht, was wir im Folgenden voraussetzen. Nur sehr starke Inductoren verlangen die Zurückwerfungsmethode.

Induction durch die verticale Componente. Man legt den Inductionsmultiplicator durch Drehen um LL horizontal und orientirt das Instrument mit Hülfe einer Magnetnadel, bis die Drehungsaxe M in den magnetischen Meridian fällt. Demnächst wird die Axe LL mit den Fufsschrauben und mittels einer auf LL aufgesetzten Wasserwage horizontal gemacht. Diese Axe soll von nun an unverändert bleiben, und es werden daher die künftigen Correctionen nur mit der in der Figur mittleren, auf der Rückseite gelegenen Stellschraube ausgeführt.

Nun wird die Drehungsaxe M des Multiplicators genau horizontal gelegt, d. h. so, dass die Luftblase der auf M aufzusetzenden Wasserwage bei dem Umsetzen dieselben Theilstriche ihrer Röhre einnimmt. Jetzt wird ein Satz von Inductions-Beobachtungen nach I. vor. Art. ausgeführt, wobei der Multiplicator jedesmal von dem einen zu dem anderen Anschlag um 180° gedreht wird. Die schliesslich entstehenden Schwingungsbogen bezeichnen wir durch A_1.

Induction durch die horizontale Componente. Man gebe dem Inductor die in obiger Figur gezeichnete Lage, d. h. man stelle den Multiplicator aufrecht, lehne ihn an einen der Anschläge und setze nun eine Wasserwage auf die Axe M, so dass die Röhre der Wasserwage im magnetischen Meridian liegt. Die mittlere Fufsschraube wird so gedreht, dass die Luftblase in den beiden äussersten, um 180° verschiedenen Stellungen des Multiplicators dieselben Theilstriche einnimmt. Dann liegt die Drehungs-

axe M also in einer zum magnetischen Meridian senkrechten Verticalebene.

Nun wird gerade wie vorher ein Satz Inductionsbeobachtungen ausgeführt, und es sei der schliesslich sich constant erhaltende Schwingungsbogen $= A_2$.

Dann ist die Inclination J gegeben durch

$$\text{tang}\, J = \frac{A_1}{A_2}.$$

Prüfung des Instrumentes. Dass die beiden Stellungen des Multiplicators, welche durch das Anlehnen gegen die beiderseitigen Anschläge gegeben sind, um 180° differiren, wird am einfachsten mittels eines versilberten nach beiden Seiten spiegelnden Planglases erkannt. Man stellt die Axe M aufrecht, befestigt auf ihr den kleinen Spiegel ebenfalls aufrecht und hält das Auge in der Entfernung von einigen Metern in gleicher Höhe wie den Spiegel so, dass eine verticale Marke (Fensterstange u. dgl.) im Spiegel erscheint. Beim Anlegen gegen den anderen Anschlag muss dieselbe Marke wieder erscheinen.

Eine zweite Prüfung bezieht sich darauf, dass die Windungsfläche des Multiplicators bei dem Anlegen gegen die Anschläge senkrecht auf der zu bestimmenden erdmagnetischen Componente steht. An einem geometrisch sorgfältig in einen Rahmen gewundenen Inductor mag man diese Stellung gegen die horizontale Componente mittels einer an den Rahmen gehaltenen Bussole mit rechtwinkligem Fussbrett, und gegen die verticale mit einer Wasserwage prüfen. Andernfalls dient die dem Instrument beigegebene Vorrichtung (Fig.) dazu, die man an den Anschlägen befestigen und dadurch den Spielraum der Drehung auf etwa 30° beschränken kann. Mit diesem beschränkten Drehungswinkel wird dann ein Satz von Inductionsbeobachtungen auf jeder Seite ausgeführt: die durch Multiplication erhaltenen Endausschläge müssen gleich gross sein.

Fig. 23.

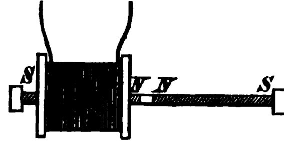
Ein geringer Fehler (etwa von 1°) in der Erfüllung der beiden Bedingungen bewirkt in dem Resultat nur einen verschwindenden Fehler, wogegen auf die Orientirung der Axe MM mit der Wasserwage die grösste Sorgfalt zu verwenden ist.

Vgl. W. Weber, über die Anwendung der magnetischen Induction auf Messung der Inclination. Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. Bd. 5. 1853.

78. Vergleichung zweier Widerstände mit dem Magneto-Inductor.

Der Magnetoinductor von Weber besteht aus einem Solenoid, in dem ein aus zwei mit den gleichnamigen Polen gegen einander gesetzten Magneten bestehender Stab verschoben werden kann. Das Durchschieben von dem einen bis zu dem anderen Anschlag erzeugt eine elektromotorische Kraft in den Drahtwindungen, je nach der Richtung in verschiedenem Sinne aber von gleicher Grösse. Die Endstellungen werden mittels der verstellbaren Anschläge so regulirt, dass in ihrer Nähe eine kleine Verschiebung keine elektromotorische Kraft gibt. Auf jeder Seite nämlich ist eine solche Stellung vorhanden und kann durch einen Versuch leicht gefunden werden.

Fig. 24.



Werden die Enden des Inductordrahtes durch eine Leitung geschlossen, so geht bei jedem „Inductionsstoss“ eine gewisse Elektricitätsmenge durch dieselbe, welche für denselben Inductor nur vom Gesammtwiderstande (Solenoid + übrige Leitung) abhängt, indem sie demselben umgekehrt proportional ist. Indem man in die Kette ein Galvanometer mit aufgehangener (astatischer) Nadel von hinreichender Schwingungsdauer einschaltet, kann man nach der Multiplications- oder Zurückwerfungsmethode (76) diese Menge messen. Wir wenden, um uns von der durch eingeschaltete Widerstände bewirkten Aenderung der Dämpfung unabhängig zu machen, die Zurückwerfung an.

Um nun zwei Widerstände w_1 und w_2 zu vergleichen, hat man drei Beobachtungssätze anzustellen, nämlich

1) indem der Inductor nur durch das Galvanometer geschlossen ist. Der grosse und kleine Bogen (S. 177) sei a und b;

2) indem ausserdem der Widerstand w_1 eingeschaltet ist. Die Bogen seien a_1 und b_1;

3) indem w_2 anstatt w_1 eingeschaltet wird. Die Bogen seien a_2 und b_2.

Bezeichnen wir dann die Ausdrücke $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}$ u. s. w. durch i, i_1 und i_2, so ist (vgl. S. 162)

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{i-i_1}{i-i_2}\,\frac{i_2}{i_1}.$$

79. Absolute Widerstandsbestimmung.

Vorausgesetzt wird ein Erdinductor (77) von bekannter Windungsfläche und ein Galvanoskop, dessen auf einen Holzrahmen gewundener Draht die Nadel eng umschliesst und daher dämpft. Die Schwingungsdauer der letzteren betrage mindestens etwa 15^{sec}, und die Empfindlichkeit sei ausreichend, um die Methode der Zurückwerfung (76, II) anzuwenden. Es bedeute

- K das Trägheitsmoment der Galvanometernadel (53),
- t ihre Schwingungsdauer,
- S die Summe der von den Inductor-Windungen umschlossenen Flächen in □^{mm},
- T die inducirende Componente des Erdmagnetismus,
- a und b die beiden Schwingungsbogen (S. 177), als Einheit der dem Radius gleiche Bogen angenommen,
- $\lambda = \log\text{nat}\, a - \log\text{nat}\, b$ das natürliche logarithmische Decrement bei geschlossener Kette,
- λ' dasjenige bei unterbrochener Kette (vgl. 70, III),

so ist der absolute Widerstand w des Schliessungskreises

$$w = \frac{32\,S^2 T^2}{K}\,\frac{t}{\pi}\,\frac{\lambda-\lambda'}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}\,\frac{ab}{(a^2+b^2)^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{\pi}}.$$

Vgl. S. 195 ff. und W. Weber, zur Galvanometrie, Abh. d. Götting. Ges. d. Wiss. Bd. 10.

Das absolute magnetische und elektrische Maafssystem.

Jede Grössenart verlangt, um gemessen, d. h. in einer Zahl ausgedrückt zu werden, eine Maafseinheit derselben Art. Diese Einheit ist zunächst willkürlich und kann für viele Grössenarten durch ein aufbewahrtes Originalmaafs (Etalon, Standard) definirt werden; bei anderen Grössen, beispielsweise Geschwindigkeit, Wärmemenge, Elektricitätsmenge ist dagegen eine solche Definition unmöglich. Daher führt man solche Grössen mittels geometrischer und physikalischer Gesetze auf andere zurück, indem man z. B. als Geschwindigkeitseinheit diejenige wählt, bei welcher die Länge Eins in der Zeit Eins zurückgelegt wird, als Wärmeeinheit diejenige Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser um einen Temperaturgrad erwärmt, als Elektricitätsmenge Eins diejenige, welche auf eine gleiche Menge aus dem Abstand Eins die Krafteinheit ausübt. Im Gegensatz zu den willkürlichen oder Grundmaafsen kann man die letzteren als „abgeleitete“ Maafse bezeichnen.

Die zunächst gezwungene Einführung solcher Maafse zeigt sich aber bei weiterer Ueberlegung auch sehr vortheilhaft. Denn ganz abgesehen davon, dass die Beschränkung der Anzahl willkürlicher Grund-Maafse an sich einen Fortschritt bezeichnet, kann man die Wahl der neuen Einheiten zugleich so treffen, dass dem Naturgesetz, welches zur Definition benutzt wird, durch die neue Einheit eine einfachere Gestalt zukommt. Im Allgemeinen z. B. ist der durch einen bewegten Körper zurückgelegte Weg l der Geschwindigkeit u und der Zeit t proportional, also $l = \text{Const.}\,ut$, wo der Zahlenwerth der Constante von den gewählten Einheiten abhängt. Würden wir etwa die Fall-Geschwindigkeit am Ende der ersten Secunde als Geschwindigkeits-Einheit annehmen,

so wäre Const. $= g$. Durch die vorhin gegebene Definition aber wird Const. $= 1$, und das Gesetz erhält die möglichst einfache Gestalt $l = ut$.

Gerade so vereinfachen sich die geometrischen Beziehungen, wenn man für Flächen- und Raum-Maafse nicht willkürliche Einheiten einführt, sondern diese einfach als Quadrat, resp. Cubus über der Längeneinheit definirt; ein Vortheil, dessen sich die Wissenschaft von jeher bedient hat, der aber erst jetzt auch in der Praxis durchgeführt wird.

Und so kann jede abgeleitete Einheit dazu dienen, die Constante aus einem Naturgesetz herauszuschaffen.

Zu den Gegenständen, für welche sich aufzubewahrende Grundmaafse nicht herstellen lassen, gehören nun fast alle magnetischen und elektrischen Grössen, und daher kommen hier die abgeleiteten Maafse zu einer besonders hervorragenden Bedeutung. Das System dieser Maafse ist von Gauss und Weber durchgeführt worden, welche zeigten, wie man alle hier zu messenden Grössen auf die Längen-, Massen- und Zeit-Einheit zurückführen kann. In dieser Weise abgeleitete Einheiten nennt man speciell absolute Maafse[1]).

Die Wahl der Grundmaafse für Länge, Masse und Zeit ist zunächst ganz willkürlich, indessen wird, wo nichts anderes angegeben ist, nach dem Beispiel von Gauss als Längeneinheit das Millimeter, als Zeiteinheit die Secunde, als Masseneinheit das Milligramm angenommen.

---

1) Der Name „absolut“ ist von der ersten in dieser Weise durch Gauss definirten Maafseinheit der erdmagnetischen Intensität hergenommen worden. Im Gegensatz zu der früher üblichen willkürlichen Annahme, die Intensität in London gleich Eins zu setzen, also nur relative Bestimmungen gegen London vorzunehmen, gab Gauss in seiner Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata eine aus Länge, Masse und Zeit abgeleitete absolute, d. h. nicht nur vergleichende, Einheit für die erdmagnetische Intensität und im Anschluss daran für die magnetischen Grössen überhaupt. In ähnlicher Weise wurde dann von W. Weber dasselbe Bedürfniss, von nur vergleichenden zu selbständigen Maafsen überzugehen, für die sämmtlichen elektrischen Grössen befriedigt, unter Beibehaltung der Bezeichnung dieser Maafse. Jetzt hat der Name absolutes Maafs als Terminus technicus eine bestimmte Bedeutung gewonnen und ist daher unbedingt beizubehalten, wenn auch zugegeben werden mag, dass der Name abgeleitetes Maafs (Rep. Brit. Assoc. 1863. S. 112) dem Wesen des Systems näher tritt.

Es muss also festgehalten werden, dass hier die Masse von 1 Cub. Mm. Wasser als Milligramm bezeichnet wird, während der populäre Sprachgebrauch unter Gramm u. s. w. meistens Gewichte versteht. Beispielsweise also ist das Trägheitsmoment eines kleinen Körpers von m^{mgr}, der sich im Abstande a^{mm} von einer Drehungsaxe befindet, im absoluten elektrisch-magnetischen Maafssystem $= a^2 m$ und nicht etwa $= a^2 \frac{m}{g}$ zu setzen. Dagegen ist das Drehungsmoment, welches er durch die Anziehung der Erde im Horizontalabstande a von einer Drehungsaxe ausübt, $= amg$, wobei unter g die Beschleunigung durch die Schwere in Mm. und Sec. gemessen, also unter 45° Breite die Zahl 9806 verstanden wird.[1])

Alle Grössen stellen sich nach dem Vorigen als Functionen von Länge, Masse und Zeit dar, z. B. eine Geschwindigkeit als eine Länge dividirt durch eine Zeit, ein Volumen als dritte Potenz einer Länge, eine Kraft als eine Länge multiplicirt mit einer Masse, dividirt durch das Quadrat einer Zeit. Wir werden im Folgenden jeder Grösse diese Function hinzufügen und dieselbe nach dem Beispiel von Maxwell und Jenkin (Rep. Brit. Assoc. 1863 S. 132) die Dimension der betreffenden

---

[1]) Will man die Frage, ob das Gramm u. s. w. als Gewichts- oder als Masseneinheit zu dienen habe, allgemein beantworten, so kann wissenschaftlich gar kein Zweifel an der Antwort sein: Da das Gewicht eines Körpers schlechthin ganz unbestimmt und selbst an der Erdoberfläche um ½ Procent veränderlich ist, so kann man nicht das Gewicht irgend eines Körpers als Gewichtseinheit aufstellen. Es wäre auch verkehrt, zu sagen: als Gewichtseinheit betrachten wir unter dem Namen Gramm das Gewicht eines Cubikcentimeters Wasser unter 45° Breite, denn dann müssten ja die Gewichtsätze für jede geographische Breite besonders angefertigt werden. Was man mit dem Namen „Gewichtsatz" bezeichnet, ist eben nichts Anderes als ein Massensatz, und eine Wägung mit der gewöhnlichen Wage ist keine Gewichts-, sondern eine Massenbestimmung. Das Gewicht, d. h. die Kraft, mit welcher der Körper von der Erde angezogen wird, erhält man erst durch die Bestimmung der Fallgeschwindigkeit, also z. B. durch die Schwingungsdauer des am Faden aufgehangenen Körpers.

In der That aber besteht auch der Zweck der Wägung meistens in der Massenbestimmung. Dem Chemiker, dem Kaufmann, dem Arzte ist es nicht um den Druck der Körper auf ihre Unterlage zu thun, sondern lediglich um ihre Masse, denn durch diese wird die chemische Wirksamkeit, der Geld- oder der Nahrungs-Werth u. s. w. bedingt.

Grösse nennen. Durchweg soll dabei eine Länge mit l, eine Masse mit m, eine Zeit mit t bezeichnet werden. Die Dimension eines Raumes ist also l^3, einer Geschwindigkeit $= lt^{-1}$, einer Kraft $= mlt^{-2}$.

Diese Dimension gibt sofort die Möglichkeit, von den immerhin willkürlich gewählten Einheiten Mm., Mgr. und Sec., (welche den Nachtheil unbequem kleiner Maafse, also sehr grosser nicht mehr übersichtlicher Zahlen mit sich führen) zu beliebigen andern überzugehen. Denn wenn eine Grundgrösse in der abgeleiteten auf der n^{ten} Potenz vorkommt, so ändert sich die abgeleitete Einheit im Verhältniss k^n, sobald die Grundeinheit im Verhältniss k geändert wird. Der Zahlenwerth der Grösse ändert sich hierdurch also im Verhältniss k^{-n}. Die Zahl, welche eine Geschwindigkeit darstellt, wird bei dem Uebergang vom Mm. zum Cm. als Längeneinheit im Verhältniss 10^{-1} geändert, beim Uebergang von Secunde zu Minute im Verhältniss 60^{+1}. Die Zahl für eine Kraft, wenn wir von Mm., Mgr. zu Cm., Gr. übergehen, im Verhältniss $10^{-1} \cdot 1000^{-1} = \frac{1}{10000}$.

Indem wir uns hiernach zu den einzelnen Maafsen und Messungen wenden, werden wir die für absolute elektrische und magnetische Messungen grundlegenden Maafse der Mechanik vorausschicken.

Mechanische Maafse.

Kraft. Das Grundgesetz der Mechanik sagt, dass die Geschwindigkeit u, welche die Kraft k einem Körper von der Masse m in der Zeit t mittheilt, gegeben wird durch $u = C . \frac{kt}{m}$, wo die Constante C von den gewählten Einheiten abhängt. Soll $C = 1$ werden, wodurch also das Gesetz die möglichst einfache Gestalt annimmt, so muss für v, t und m gleich Eins auch $k = 1$ sein, und es ist demnach die

Einheit der Kraft diejenige Kraft, welche der Masse Eins in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit Eins mittheilt. Dimension $= lmt^{-2}$.

Die durch die Anziehung der Erde auf m Mgr. ausgeübte Kraft beträgt hiernach $9806 . m \frac{\text{Mm. Mgr.}}{\text{Sec.}^2}$.

Arbeit. Arbeit wird verrichtet, wenn der Angriffspunct einer Kraft sich bewegt. Die verrichtete Arbeit A ist proportional der Kraft k und dem in ihrer Richtung zurückgelegten Weg l. Wollen wir das Gesetz in der einfachsten Gestalt haben, nämlich die Arbeit gleich dem Producte aus Kraft und Weg setzen, $A = k.l$, so ist

die Arbeitseinheit verrichtet, wenn ein Punct, an welchem die Kraft Eins angreift, sich in deren Richtung um die Längeneinheit verschoben hat. Dimension $= l^2 m t^{-2}$.

Durch Hebung von 1 Gr. um 1 Met. wird die Arbeit 1000.9806.1000 $= 9806.10^6 \frac{\text{Mm.}^2\,\text{Mgr.}}{\text{Sec.}^2}$ verrichtet.

Drehungsmoment. Setzen wir das Drehungsmoment P gleich dem Product aus einer Kraft k in ihren Hebelarm l, $P = k.l$, so ist die

Einheit des Drehungsmoments vorhanden, wenn die Kraft Eins am Hebelarm Eins wirkt. Dimension $= l^2 m t^{-2}$.

Directionskraft. Wenn ein um eine feste Axe drehbarer Körper eine stabile Gleichgewichtslage hat, so wird in einer anderen Lage ein Drehungsmoment P auf denselben ausgeübt, welches für einen beliebig kleinen Ablenkungswinkel φ aus der Gleichgewichtslage, immer mit φ proportional ist. Das constante Verhältniss $\frac{P}{\varphi} = D$ nennen wir die auf den Körper ausgeübte Directionskraft, wobei als Einheit des Winkels derjenige Winkel ($57^0,296$) gilt, für welchen der Bogen gleich dem Halbmesser ist.

Die Einheit der Directionskraft also ist vorhanden, wenn das Drehungsmoment für einen kleinen Ablenkungswinkel aus der Gleichgewichtslage dem Winkel gleich ist. Dimension $= l^2 m t^{-2}$.

Die Directionskraft eines durch die Schwere getriebenen Pendels, welches aus der Masse m Mgr. mit dem Abstande l Mm. des Schwerpuncts von der Drehungsaxe besteht, ist demnach $D = lm.9806 \frac{\text{Mm.}^2\,\text{Mgr.}}{\text{Sec}^2}$, denn das Drehungsmoment für einen Ablenkungswinkel φ ist $= lm.9806.\sin\varphi$, und für ein kleines φ kann $\varphi = \sin\varphi$ gesetzt werden.

Trägheitsmoment. Setzen wir das Trägheitsmoment K einer Masse m im Abstand l von einer Drehungsaxe $K = l^2 m$, oder wenn mehrere Massen vorhanden sind, $K = \Sigma l^2 m$, so ist

das Trägheitsmoment Eins durch einen Punct von der Masse Eins im Abstand Eins von der Drehungsaxe gegeben. Dimension $= l^2 m$.

Das Trägheitsmoment eines am Faden aufgehangenen Magnets von der Länge l, der Breite l' Mm., und der Masse m Mgr. ist demnach (S. 124) $K = m \frac{l^2 + l'^2}{12}$ Mm.^{2} Mgr.

Trägheitsmoment K, Directionskraft D und Schwingungsdauer t bei kleiner Schwingungsweite hängen durch die Gleichung $\frac{t^2}{\pi^2} = \frac{K}{D}$ zusammen, wobei die Bedeutung der Dimensionen sich darin zeigt, dass in der That $l^2 m$ durch $l^2 m t^{-2}$ dividirt, das Quadrat einer Zeit gibt.

Elektrostatisches Maass.

Elektricitätsmenge. Zwei in Puncten concentrirt gedachte Elektricitätsmengen ε und ε' in der Entfernung l von einander stossen sich mit einer Kraft $k =$ Const. $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{l^2}$ ab, wobei der Zahlenwerth der Constante von den gewählten Einheiten abhängt. Fordern wir, dass die Constante $= 1$ wird, dass also das Gesetz die möglichst einfachste Gestalt annimmt, $k = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{l^2}$, so ist die sogenannte mechanische

Einheit der Elektricitätsmenge diejenige Menge, welche eine ihr gleiche Menge aus der Entfernung Eins mit der Einheit der Kraft abstösst. Dimension $= l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Magnetische Maafse.

Menge des freien Magnetismus, oder Stärke eines Magnetpoles. Gerade so wie oben schreiben wir das Grundgesetz der Wechselwirkung zweier hypothetischer Mengen μ und μ' freien Magnetismus (oder zweier punctförmiger Magnetpole von der Stärke μ und μ') aus dem Abstande l, $k = \frac{\mu\mu'}{l^2}$ und erhalten

als Einheit der Menge freien Magnetismus (oder der Stärke

des Magnetpoles) diejenige Menge (oder den Magnetpol), welche auf eine gleiche aus dem Abstande Eins die Krafteinheit ausübt. Dimension $= l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Stabmagnetismus oder magnetisches Moment. Jeder Magnet hat gleiche Mengen freien positiven und negativen Magnetismus. Der einfachste Magnetstab würde aus zwei gleich starken punctförmigen Polen bestehen. Es sei $\pm\mu$ die Menge Magnetismus, welche in einem der Pole gedacht wird, und l der Abstand der Pole von einander, so sind die Fernwirkungen des Stabes proportional mit $l\mu$. Wir nennen $l\mu$ das magnetische Moment oder kurz den Magnetismus des Stabes.

Ein Magnet, welcher aus zwei Polen, mit den Mengen ± 1 des freien Magnetismus (oder von der Stärke ± 1) im Abstand Eins von einander bestände, würde hiernach die Einheit des Stabmagnetismus besitzen. Dimension $= l^{\frac{5}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Der Theorie zufolge ist der durch dieselbe magnetisirende Kraft zwei Magneten von ähnlicher Gestalt mitgetheilte Stabmagnetismus der Masse proportional. Das Maximum von permanentem Magnetismus, welches sehr dünne Stäbe erhalten können, beträgt etwa $1000 \frac{\text{Mm.}^{\frac{5}{2}}\,\text{Mgr.}^{\frac{1}{2}}}{\text{Sec.}}$ auf jedes Milligramm Stahl. Das Verhältniss des Stabmagnetismus zu der Masse in Mgr. nennt man specifischen Magnetismus eines Stabes.

Die von einem Magnet auf einen Magnetpol ausgeübte Kraft ergibt sich durch folgende Betrachtung.

1) Der Magnetpol μ' sei in der verlängerten Verbindungslinie der Pole gelegen (erste Hauptlage nach Gauss), sein Abstand vom Mittelpunct des Magnets sei $= L$. Der nähere Pol übt eine

$+\mu \quad -\mu \quad \mu'$ (l)

Kraft $= \frac{\mu\mu'}{\left(L - \frac{l}{2}\right)^2}$, der entferntere eine solche in entgegengesetztem Sinne $= \frac{\mu\mu'}{\left(L + \frac{l}{2}\right)^2}$ aus; die gesammte Kraft (anziehend oder abstossend, je nachdem der entgegengesetzte oder gleichartige Pol der nähere ist) beträgt also

$$k = \mu\mu'\left(\frac{1}{\left(L-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(L+\frac{l}{2}\right)^2}\right) = \mu\mu'\frac{2Ll}{\left(L^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

$l\mu$ aber ist der Magnetismus des Stabes $= M$, also wird

$$k = 2M\mu'\frac{L}{\left(L^2-\frac{l^2}{4}\right)^2} = 2\frac{M\mu'}{L^3}\left(1-\frac{l^2}{4L^2}\right)^{-2} = 2\frac{M\mu'}{L^3}\left(1+\frac{1}{2}\frac{l^2}{L^2}\cdots\right).$$

Wenn die Entfernung L gegen l sehr gross wird, so dass man $\frac{1}{2}\frac{l^2}{L^2}$ gegen 1 vernachlässigen kann, so wird einfach $k = 2\frac{M\mu'}{L^3}$.

2) Der Magnetpol μ' sei in dem auf der Mitte der Stabaxe gelegenen Perpendikel (zweite Hauptlage), im Abstand L von der Mitte des Magnets gelegen. Der ungleichartige Pol übt eine Anziehungskraft $= \frac{\mu\mu'}{L^2+\frac{l^2}{4}}$, der gleichartige eine gleich grosse Abstossungskraft aus. Beide Kräfte setzen sich nach dem Parallelogramm in eine der Stabaxe parallele Kraft

$-\mu$ l $+\mu$ μ'

$$k = 2\frac{\mu\mu'}{L^2+\frac{l^2}{4}}\cdot\frac{\frac{1}{2}l}{\sqrt{L^2+\frac{l^2}{4}}} = \frac{l\mu\mu'}{\left(L^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M\mu'}{\left(L^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

zusammen, wofür wieder geschrieben werden kann

$$k = \frac{M\mu'}{L^3}\left(1+\frac{l^2}{4L^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{M\mu'}{L^3}\left(1-\frac{3}{8}\frac{l^2}{L^2}+\cdots\right).$$

Bei sehr grosser Entfernung L wird $k = \frac{M\mu'}{L^3}$.

Ersetzen wir den Magnetpol μ' durch eine auf der Kraftrichtung senkrechte kurze Magnetnadel von der Länge l', deren Pole einzeln die Stärke μ' haben, so wird auf sie ein Drehungsmoment $2k.\frac{l'}{2} = kl'$ ausgeübt. Da $\mu'l'$ das magnetische Moment der Nadel, so wird demnach von einem Magnet M auf einen anderen M' aus der (gegen die Länge der Magnete grossen) Entfernung L ein Drehungsmoment P ausgeübt:

in der 1. Hauptlage, d. h. wenn M' in der Fortsetzung von M gelegen und zu M senkrecht gerichtet ist, $P = 2\frac{MM'}{L^3}$;

in der 2. Hauptlage, d. h. wenn M' in der Senkrechten auf M liegt, und ebenfalls zu M senkrecht gerichtet ist, $P = \frac{MM'}{L^3}$.

Hierauf kann die Einheit des Stabmagnetismus unabhängig von der Definition des einzelnen Poles, aber der Bedeutung nach ganz mit der obigen zusammenfallend, folgendermassen festgesetzt werden:

Die Einheit des Stabmagnetismus besitzt derjenige Magnetstab, welcher auf einen gleichen Stab aus der (grossen) Entfernung L in der 2. Hauptlage (vgl. oben) das Drehungsmoment $\frac{1}{L^3}$ ausübt.

Bildet der bewegliche Magnet mit der Kraftrichtung den Winkel φ, so wird das Drehungsmoment, wie man leicht sieht, durch Multiplication obiger Ausdrücke mit $\cos\varphi$ erhalten.

Was hier für ideale Magnete mit punctförmigen Polen gezeigt worden ist, gilt ebenso für die wirklichen. Für Fernwirkungen gibt es zwei Mittelpuncte, in denen der positive und der negative Magnetismus concentrirt gedacht werden können. Für gewöhnlich sind diese „Pole" aber nicht genau bekannt, aus welchem Grunde auf S. 135. wo aus einer Entfernung gewirkt wird, in welcher die Correctionsglieder mit $\frac{l^2}{L^2}$ in obigen Formeln noch nicht unmerklich werden, zur Elimination dieses Gliedes noch aus einer zweiten Entfernung beobachtet werden musste.

Intensität der erdmagnetischen Kraft. An irgend einem Ort der Erde wird auf einen Magnetpol eine Kraft ausgeübt, deren Grösse der Stärke des Poles μ proportional ist. Diejenige Kraft, welche auf den Pol Eins ausgeübt wird, nennen wir die Intensität der erdmagnetischen Kraft an dem Orte, oder auch kurz die erdmagnetische Intensität. Horizontale Intensität T ist die horizontale Componente dieser Kraft, welche bei den gewöhnlichen Magnetnadeln allein zur Wirkung kommt. Wir beziehen unsere Bemerkungen um der Kürze willen auf sie.

Da die Kraft auf einen Pol μ durch μT gegeben ist, so ist das Drehungsmoment auf eine zur Kraftrichtung senkrechte Magnetnadel mit zwei Polen $\pm\mu$ im Abstande l von einander $2\mu T.\frac{l}{2} = \mu l T = MT$, wenn M das magnetische Moment der Nadel bedeutet. Wir haben also

die Einheit der erdmagnetischen Intensität da, wo auf einen Magnet vom Stabmagnetismus Eins, der zur Kraftrichtung senkrecht ist, die Einheit des Drehungsmoments ausgeübt wird. Dimension $= l^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Bildet die Richtung des Magnets mit der Kraftrichtung den Winkel φ, so ist das Drehungsmoment $= MT \sin\varphi$. Also MT ist für einen drehbaren Magnet die Grösse, welche wir oben Directionskraft genannt haben, und es besteht demnach für die Schwingungsdauer t, wenn K das Trägheitsmoment ist, die Gleichung $\frac{t^2}{\pi^2} = \frac{K}{MT}$, wonach das Product aus Stabmagnetismus und erdmagnetischer Intensität auf S. 133 bestimmt wurde.

Der Winkel, um welchen eine kurze Magnetnadel durch einen Magnet aus dem magnetischen Meridian abgelenkt wird, ergibt sich folgendermassen. Der Magnet M befinde sich in der ersten Hauptlage (S. 189) zu der Nadel vom Moment M' im Abstand L. Wenn φ der Ablenkungswinkel, so muss für diesen Winkel das vom Magnet ausgeübte Drehungsmoment $2\frac{MM'}{L^3}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{L^2}\right)\cos\varphi$ gleich dem vom Erdmagnetismus ausgeübten $M'T \sin\varphi$ sein. Also ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{L^3}\frac{M}{T}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{L^2}\right),$$

von welcher Gleichung auf S. 135 zur Bestimmung von $\frac{M}{T}$ Gebrauch gemacht wurde. Die daselbst mit a bezeichnete Grösse hat also die physische Bedeutung, dass $\sqrt{2a}$ den Pol-Abstand des Magnets darstellt.

In der zweiten Hauptlage fällt der Factor 2 weg, und anstatt $\frac{1}{2}l^2$ kommt $-\frac{3}{8}l^2$.

Galvanische Maafse.

Stromstärke; mechanisches Maafs. Die Zahl für eine Stromstärke würde in directester Weise durch die mechanisch gemessene Elektricitätsmenge (S. 188) gegeben sein, welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt der Kette fliesst, und es wäre hiernach die mechanische

Einheit der Stromstärke in demjenigen Strom gegeben, bei welchem in der Zeiteinheit die Elektricitätsmenge Eins durch den Querschnitt der Kette fliesst. Dimension $= l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}$.

Diese aus der Ursache des Stromes abgeleitete Einheit ist wegen der grossen Schwierigkeit einer solchen Messung praktisch nicht im Gebrauch, sondern man bedient sich zur Definition der Stromstärke einer Wirkung des Stromes, und zwar meistens der chemischen oder magnetischen Wirkung.

Chemisches Strommaafs. Hier gilt als Einheit des Stromes derjenige Strom, welcher in der Zeit Eins die Einheit der chemischen Wirkung ausübt.

Freilich ist dieses Maafs nicht ein absolutes Maafs im strengen Sinne, denn, da die durch den Strom ausgeschiedene Menge eines zersetzbaren Leiters von dessen Substanz abhängt, so wird ausser Längen-, Massen- und Zeit-Einheit noch eine willkürliche Annahme über die Substanz verlangt. Da die Zersetzung dem Aequivalentgewicht proportional ist, und da die Chemie dasjenige des Wasserstoffs = 1 setzt, so würde auch für das Strommaafs die Ausscheidung der Einheit der Wasserstoffmenge als Einheit der chemischen Wirkung anzunehmen sein. Praktisch gebräuchlich ist es, nach der zersetzten Wassermenge zu rechnen, entweder in Mgr. oder als Knallgas in Cub. Cm. bei 0^0 und 760^{mm} Druck gemessen. Vgl. hierüber S. 154.

Magnetisches oder Weber'sches Strommaafs. Denken wir uns ein geradliniges Stück von der Länge l eines Stromes von der Stärke i, und in der Senkrechten auf der Stromrichtung, im Abstand L vom Stromelement die Menge μ freien Magnetismus, so ist die (transversale) Kraft des Stromes auf den Magnetpol, oder umgekehrt, gegeben durch

$k = \text{Const.}\,\frac{li\mu}{L^2}$. Soll das Gesetz den möglichst einfachen Ausdruck erhalten $k = \frac{li\mu}{L^2}$, so wird also

die Einheit der Stromstärke durch denjenigen Strom gegeben, welcher unter obigen normalen Verhältnissen auf den Magnetpol Eins die Krafteinheit ausübt. Dimension $= l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$.

Statt dessen können wir auch sagen, indem wir auf die Wirklichkeit übergehen,

der Strom Eins, im Kreise vom Halbmesser L um eine in seiner Ebene liegende kurze Magnetnadel vom Magnetismus Eins herumgeführt, übt auf die Nadel ein Drehungsmoment $\frac{2\pi L}{L^2} = \frac{2\pi}{L}$ aus.

Nach dem Ampère'schen Gesetz über die Wechselwirkung zweier Ströme ist hiermit identisch die folgende Definition:

zwei geradlinige, gleichgerichtete, zu ihrer Verbindungslinie senkrechte Theile des Stromes Eins, jeder von der Länge Eins, ziehen sich aus der (grossen) Entfernung L mit einer Kraft $\frac{2}{L^2}$ an.

Endlich besteht für einen ebenen geschlossenen Strom noch die Beziehung, dass er sich in Betreff der magnetischen, von ihm ausgeübten oder erlittenen Fernwirkungen wie ein durch seine Mitte hindurchgesteckter, zur Stromebene senkrechter Magnet vom magnetischen Moment fi verhält, wo f die Grösse der vom Strom umflossenen Fläche bedeutet. Als Flächeneinheit gilt natürlich das Quadrat über der Längeneinheit. Demnach kann man endlich, mit obigen Definitionen identisch, auch sagen,

der Strom Eins, die Flächeneinheit umfliessend, verhält sich nach aussen wie ein zur Stromebene senkrechter kleiner Magnet von der Einheit des Stabmagnetismus.

Der obige Satz lässt sich z. B. für einen Kreisstrom, welcher auf einen in seiner Axe gelegenen Magnetpol μ wirkt, leicht ableiten. Die Stromstärke sei $= i$, der Halbmesser des Kreises $= l$, und der Abstand des Poles von der Kreisebene $= L$. Jedes Stückchen des Kreises von der Länge λ übt die Kraft $\frac{\lambda i \mu}{L^2 + l^2}$ aus. Alle einzelnen Kräfte setzen sich,

da die seitlichen Componenten sich aufheben, zu einer nach dem Mittelpunct des Kreises gerichteten Kraft zusammen. Wir brauchen also, um die Gesammtkraft zu erhalten, nur alle Componenten nach dieser Richtung zu summiren. Die von λ herrührende Componente ist

$$\frac{\lambda i \mu}{L^2 + l^2} \frac{l}{\sqrt{L^2 + l^2}} = \frac{\lambda l i \mu}{(L^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da der ganze Kreisumfang die Länge $2\pi l$ hat, so ist also die Gesammtkraft $= \frac{2\pi l^2 i \mu}{(L^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}$. πl^2 ist die umflossene Fläche $= f$. Für eine grosse Entfernung können wir l^2 gegen L^2 vernachlässigen und bekommen als Kraft

$$2 \frac{fi.\mu}{L^3},$$

d. h. der Strom wirkt gerade wie ein Magnet vom Stabmagnetismus fi. Man nennt daher fi wohl das galvanische Moment des geschlossenen Stromes i, welcher die Fläche f umfliesst. Vgl. 75, II.

Ueber die Beziehungen zwischen dem chemischen und dem magnetischen Maaſse wird in (67) gesprochen.

Elektromotorische Kraft. Das absolute Maaſs für diese Grösse ist aus den Erscheinungen der Magneto-Induction abgeleitet worden. Das Gesetz lautet in dem einfachsten Falle folgendermassen. Es sei an einem Orte, wo die magnetische Intensität T herrscht (S. 191), ein geradliniger, zur Richtung von T senkrechter Stromleiter von der Länge l gegeben. Derselbe werde mit einer Geschwindigkeit u in der Richtung verschoben, welche auf der durch l und T gelegten Ebene senkrecht steht. Dann ist die bei dieser Bewegung in dem Leiter inducirte elektromotorische Kraft e proportional mit der Länge l des Leiters, mit der magnetischen Intensität T und mit der Geschwindigkeit u. Fordern wir einfach $e = lTu$, so setzen wir als Einheit der elektromotorischen Kraft diejenige, welche in einem geradlinigen Stromleiter von der Längeneinheit inducirt wird, wenn derselbe an einem Orte, wo die magnetische Intensität Eins herrscht, unter obigen normalen Verhältnissen mit der Geschwindigkeit Eins bewegt wird. Dimension $= l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-2}$.

Halten wir z. B. an einem Orte des mittleren Deutschland, wo die gesammte Intensität des Erdmagnetismus $= 4{,}5$ ist, einen geraden Draht von 1000^{mm} Länge senkrecht zur Inclinationsrichtung und bewegen ihn nun mit der Geschwindigkeit $1000 \frac{\text{Mm}}{\text{Sec}}$ senkrecht zu sich selbst und zur

Inclinationsrichtung, so ist die in ihm inducirte elektromotorische Kraft

$$= 1000.4{,}5.1000 = 4500000 \frac{Mm^{\frac{3}{2}} Mgr^{\frac{1}{2}}}{Sec^2}.$$

In diesem absoluten Maafse ist ferner die elektromotorische Kraft

$$\text{Daniell} = 114.10^9, \quad \text{Grove} = 194.10^9 \frac{Mm^{\frac{3}{2}} Mgr^{\frac{1}{2}}}{Sec^2}.$$

Von praktischer Bedeutung ist vorzugsweise die elektromotorische Kraft, welche in einem gedrehten Multiplicator durch den Erdmagnetismus inducirt wird (S. 179). Sie wird, obiger Definition entsprechend, durch folgenden Satz gegeben. Wir denken uns die Drahtwindungen auf eine zur Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene projicirt. Die Summe der von allen projicirten Windungen umschlossenen Flächen ändert ihre Grösse während der Drehung, etwa in einem bestimmten Augenblick um die kleine Grösse df in der kleinen Zeit dt. Dann ist die in diesem Augenblick inducirte elektromotorische Kraft e im obigen absoluten Maafse gleich der erdmagnetischen Intensität T multiplicirt mit der Geschwindigkeit $\frac{df}{dt}$ der Flächenänderung; $e = T\frac{df}{dt}$.

Dieselbe Einheit endlich liegt der elektromotorischen Kraft zu Grunde, wenn man das Gesetz der Magnetoinduction in folgender allgemeinen Gestalt auf die elektromagnetischen Kräfte zurückführt. Es sei ein ganz beliebig gestalteter Leitungsdraht gegeben, der in der Nähe von Magneten mit der Geschwindigkeit u bewegt wird. Um die in dem Leiter inducirte elektromotorische Kraft zu erhalten, denken wir ihn von dem Strome Eins nach Weber'schem Maafse durchflossen (S. 193). Dann würden bewegende Kräfte auf den Leiter ausgeübt werden, und k sei in irgend einem Augenblick deren Componente nach der Richtung der wirklich ausgeführten Bewegung. Die in diesem Augenblick inducirte elektromotorische Kraft ist alsdann $e = -ku$. Im Falle drehender Bewegung ist für k die Componente des Drehungsmomentes in der Drehungsebene und für u die Winkelgeschwindigkeit zu setzen.

Eine andere Definition der elektromotorischen Krafteinheit haben wir in (74) gebraucht, indem wir Strom- und Widerstands-Einheit als gegeben annahmen. Schreiben wir nämlich das Ohm'sche Gesetz $i = \frac{e}{w}$, so ist

die Einheit durch diejenige elektromotorische Kraft gegeben, welche in einem Leiter vom Widerstand Eins die Einheit der Stromstärke hervorbringt.

Leitungswiderstand. Um in dem Weber'schen Maafssystem, nach Feststellung der Einheiten für Strom und elektromotorische Kraft, die Widerstandseinheit zu erhalten, benutzen wir, wie eben geschehen, das Ohm'sche Gesetz und nennen

den Widerstand desjenigen Leiters Eins, in welchem die elektromotorische Kraft Eins den Strom Eins erzeugt. Dimension $= l t^{-1}$.

In diesem Maafs ist der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1^{met} Länge und 1 □^{mm} Querschnitt (Siemens'sche Einheit) gleich $9705 . 10^6 \frac{\text{Mm}}{\text{Sec}}$ oder gleich $0{,}9705 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$ bestimmt worden (**79**).

Der Leitungswiderstand oder der Quotient aus einer elektromotorischen Kraft durch eine Stromstärke erscheint also gleichbedeutend mit einer Geschwindigkeit und lässt sich in der That durch eine solche physikalisch vorstellen. Z. B. ist der Widerstand eines geradlinigen Drahtes von der Längeneinheit gegeben durch diejenige Geschwindigkeit, mit welcher man ihn an einem Orte mit der magnetischen Intensität Eins unter den S. 195 beschriebenen normalen Verhältnissen bewegen muss, damit in ihm die Stromstärke Eins entstände, wenn die Enden durch einen widerstandslosen Leiter (auf welchen natürlich keine Induction stattfände) mit einander verbunden wären.

Zusammenhang der absoluten galvanischen Maafse mit der Stromarbeit. Die Bedeutung des Weber'schen galvanischen Maafssystems, welches zunächst nur auf einen möglichst einfachen Ausspruch der Wechselbeziehungen zwischen Elektricität und Magnetismus gegründet ist, zeigt sich noch darin, dass ein ferneres Grundgesetz der Stromwirkung durch Einführung dieser Maafse die möglichst einfache Gestalt erhält. Die von einem Strome i in einem Leiter vom Widerstand w in der Zeit t entwickelte Wärmemenge A ist proportional mit $i^2 w t$ oder $e i t$, wo e die elektromotorische Kraft bedeutet, welche den Strom i in dem Leiter vom Widerstand w erzeugt. Durch die Einführung der absoluten Maafse aber,

und wenn wir ausserdem als Einheit der Wärmemenge diejenige nehmen, welche der Arbeitseinheit (S. 187) äquivalent ist, nimmt das Gesetz, wie Helmholtz gezeigt hat, die einfache Gestalt an $A = i^2 wt = eit$. Man kann A die innere Arbeit des Stromes nennen. Man bemerke hierbei, dass, da $l^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}$ die Dimension einer Stromstärke und lt^{-1} diejenige eines Leitungswiderstandes ist, das Product $i^2 wt$ die Dimension $l^2 mt^{-2}$, d. h. diejenige einer Arbeit ergibt.

Dieser Satz folgt aus dem allgemeinen Gesetz der Magneto-Induction in einem bewegten Leiter, wie es S. 196 ausgesprochen wurde, in Verbindung mit dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft. In einem geschlossenen Leiter, der unter dem Einfluss eines Magnetes bewegt wird, entsteht durch Induction ein Strom, auf welchen nun durch den Magnet eine bewegende Kraft ausgeübt wird, und zwar immer derartig, dass die letztere der wirklich ausgeführten Bewegung entgegenwirkt. Man verrichtet also durch diese Bewegung eine Arbeit, deren Grösse gleich dem Product aus dem zurückgelegten Weg in die widerstehende Kraft ist. Der Weg ist $= ut$, wenn u die Geschwindigkeit, t die Zeitdauer der Bewegung bedeutet; die Kraft ist jedenfalls der Stärke i des inducirten Stromes proportional. Wir können die Kraft also $= ki$ setzen und erhalten demnach die verrichtete Arbeit $= kiut$.

k bedeutet offenbar diejenige Kraft, welche unter den gegebenen Verhältnissen von dem Magnet auf einen Strom von der Stärke 1 in dem Leiter ausgeübt werden würde. Dann sagt aber das Inductionsgesetz (S. 196), dass ku die inducirte elektromotorische Kraft e nach absolutem Maasse darstellt; wir haben also die verrichtete Arbeit $kiut = eit = i^2 wt$.

Da nun nach ausgeführter Bewegung als Wirkung dieser Arbeit nur die durch den Strom in dem Leiter entwickelte Wärmemenge vorhanden ist, so folgt aus dem Gesetz der Gleichheit von Wärme und Arbeit, dass eit oder $i^2 wt$ eben diese Wärmemenge darstellt, in welche die mechanische Arbeit durch Vermittelung des Stromes umgesetzt worden ist; natürlich diejenige Wärmemenge als Einheit angenommen, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist.

Unmittelbar aber ist die in dem durchflossenen Leiter entwickelte Wärme doch nur eine innere Wirkung des Stromes, und so haben wir in $i^2 wt$ oder eit die durch einen Strom i, wenn er einen Leiter vom Widerstande w durchfliesst, oder wenn er von der elektromotorischen Kraft e hervorgebracht wird, erzeugte Wärmemenge, oder mit andern Worten die von ihm verrichtete innere Arbeit.

Nehmen wir z. B. den Strom 1 *Weber* in einer Leitung vom Widerstande 1 *Siemens* $= 9705 . 10^6 \frac{\text{Mm}}{\text{Sec}}$ nach absolutem Maass (v. S.). Die in einer Secunde verrichtete innere Arbeit ist hier $= 9705 . 10^6 \frac{\text{Mm}^2 \text{ Mgr}}{\text{Sec}^2}$, oder in dem praktisch gebräuchlichen Arbeitsmaafs ausgedrückt (S. 187),

$= \frac{9705 . 10^6}{9806 . 10^6} = 0{,}990$ Gramm-Meter. Da 424 Gramm-Meter einer Calorie (1 Gr. Wasser, 1⁰) entsprechen, so wird in diesem Falle die Wärmemenge $\frac{0{,}990}{424} = \frac{1}{428}$ Calorie erzeugt.

Es ist hierbei nicht ohne Interesse zu bemerken, dass die Siemens'sche Widerstandseinheit sich zu der absoluten Weber'schen Einheit fast genau so verhält, wie die Arbeit 1 Gramm-Meter durch Hebung einer Last zur absoluten Arbeitseinheit $1 \frac{\text{Mm}^2 \text{ Mgr}}{\text{Sec}^2}$.

Wir können daher die Weber'schen Einheiten nach Feststellung der Stromeinheit auch folgendermassen definiren.

Die Einheit der elektromotorischen Kraft ist diejenige Kraft, welche, wenn sie den Strom Eins hervorbringt, in der Zeit Eins die Arbeitseinheit verrichtet.

Oder auch

Widerstandseinheit ist der Widerstand desjenigen Leiters, in welchem der Strom Eins in der Zeiteinheit die Einheit der Arbeit verrichtet.

Tabellen.

1. Tab. Dichtigkeit einiger Körper.

Aluminium . . .	2,6	Holz, buchen . .	0,75	Eis bei 0°	0,9167
Blei	11,3	eichen . .	0,65	Wasser bei 4° . .	1,0000
Bronce	8,6	tannen . .	0,5	Aether bei 15° . .	0,7202
Eisen, Schmiede-	7,75	Kupfer	8,9	Alcohol bei 15° .	0,7938
Guss- . . .	7,5	Messing	8,4	Olivenöl	0,915
Draht . . .	7,65	Neusilber	8,5	Quecksilber bei 0°	13,596
Gussstahl .	7,8	Platin	21,5	Salpetersäure	
Elfenbein	1,9	Silber	10,4	concentr. bei 15°	1,52
Glas	2,7	Wachs	0,96	Schwefelsäure	
Flintglas. . .	3,5	Zink	7,1	concentr. bei 15°	1,843
Gold	19,3	Zinn	7,3	Terpentinöl b. 15°	0,872

	Bei 0° u. 760mm bezogen auf Wasser.	Bezogen auf Luft von gleicher Temperatur u. gleichem Druck.
Luft	0,0012928	1,00000
Sauerstoff	0,0014293	1,10563
Stickstoff	0,0012557	0,97137
Wasserstoff	0,00008954	0,06926
Kohlensäure	0,0019767	1,52910
Knallgas	0,0005361	0,41472
Wasserdampf		0,6230

2. Tab. Reduction einiger willkürlicher Araeometerscalen.

Leichter als Wasser.				Schwerer als Wasser.		
Sp. Gew.	Baumé.	Beck.	Cartier.	Sp. Gew.	Baumé.	Beck.
0,75	58°,4	56°,7		1,0	0°,0	0°,0
0,80	46,3	42,5	43°,0	1,1	13,2	15,4
0,85	35,6	30,0	33,6	1,2	24,2	28,3
0,90	26,1	18,9	25,2	1,3	33,5	39,2
0,95	17,7	8,9	17,7	1,4	41,5	48,6
1,00	10,0	0,0	11,0	1,5	48,4	56,7
				1,6	54,4	63,7
				1,7	59,8	70,0
				1,8	64,5	75,6
				1,9	68,6	
				2,0	72,6	

3. Tab. **Procentgehalt und specifisches Gewicht der wässrigen Lösungen von Schwefelsäure, Salpetersäure, Salzsäure, Kochsalz, Aetzkali, Aetznatron, Ammoniak, Rohrzucker und Alcohol bei 15° C.**

Der Procentgehalt bedeutet Gewichtsprocente, nur bei dem Alcohol Volumprocente. Die Zahlen der ersten Spalte geben also den Gehalt von 100 Gewichtstheilen Lösung an Gewichtstheilen Schwefelsäurehydrat, wasserfreier Salpetersäure, Chlorwasserstoff, Kochsalz, Aetzkali, Aetznatron, Ammoniak oder Zucker; bei dem Alcohol endlich den Gehalt von 100 Raumtheilen eines Spiritus an Raumtheilen absoluten Alcohols.

Proc. Gehalt.	Specifisches Gewicht.									Proc. Gehalt.
	SO_3HO	NO_5	H Cl	Na Cl	KaOHO	NaOHO	NH_3	Rohr-Zucker.	Alcohol	
0	0,999	0,999	0,999	0,999	1,00	1,00	0,999	0,999	0,999	0
5	1,032	1,034	1,024	1,036	1,06	1,06	0,979	1,019	0,992	5
10	1,068	1,068	1,049	1,073	1,11	1,13	0,959	1,039	0,986	10
15	1,106	1,104	1,073	1,111	1,17	1,22	0,941	1,061	0,980	15
20	1,144	1,141	1,098	1,150	1,23	1,30	0,925	1,083	0,975	20
25	1,182	1,179	1,123	1,191	1,30	1,35	0,911	1,106	0,970	25
30	1,223	1,219	1,149		1,37	1,42	0,898	1,129	0,965	30
35	1,264	1,257	1,174		1,43	1,48	0,886	1,154	0,958	35
40	1,306	1,296	1,197		1,48	1,54		1,179	0,951	40
45	1,351	1,330			1,57	1,61		1,205	0,943	45
50	1,398	1,362			1,66	1,67		1,233	0,933	50
55	1,448	1,394				1,73		1,261	0,923	55
60	1,501	1,420				1,80		1,289	0,913	60
65	1,557	1,444				1,87		1,318	0,901	65
70	1,615	1,467				1,92		1,347	0,889	70
75	1,675	1,485				1,96			0,876	75
80	1,734	1,500							0,863	80
85	1,786								0,849	85
90	1,822								0,833	90
95	1,838								0,816	95
100	1,843								0,794	100

4. Tab.

Dichtigkeit des Wassers Q bei der Temperatur t.

(Mittel aus den Bestimmungen von Hallström, Jolly, Kopp, Matthiessen und Pierre.)

t	Q	Diff.
0°	0,99988	
1	0,99993	— 5
2	0,99997	— 4
3	0,99999	— 2
4	1,00000	— 1
5	0,99999	+ 1
6	0,99997	2
7	0,99994	3
8	0,99988	6
9	0,99982	6
10	0,99974	8
11	0,99965	9
12	0,99955	10
13	0,99943	12
14	0,99930	13
15	0,99915	15
16	0,99900	15
17	0,99884	16
18	0,99866	18
19	0,99847	19
20	0,99827	20
21	0,99806	21
22	0,99785	21
23	0,99762	23
24	0,99738	24
25	0,99714	24
26	0,99689	25
27	0,99662	27
28	0,99635	27
29	0,99607	28
30°	0,99579	28

5. Tab.

Ausdehnung des Wassers von 0 bis 100°.

Volumen eines Grammes Wasser in Cub.Cm.

Temp.	Volum.	Zunahme auf 1°
0°	1,0001	
4	1,0000	
10	1,0003	
15	1,0009	0,000 12
20	1,0017	16
25	1,0029	24
30	1,0043	28
35	1,0059	32
40	1,0077	36
45	1,0097	40
50	1,0120	46
55	1,0144	48
60	1,0170	52
65	1,0197	54
70	1,0227	60
75	1,0258	62
80	1,0290	64
85	1,0323	66
90	1,0358	70
95	1,0395	74
100°	1,0432	0,000 74

6. Tab. **Dichtigkeit der trocknen atmosphärischen Luft,**

bezogen auf Wasser von 4°,

für die Temperatur *t* und den Barometerstand *b* (unter 45° Breite)

(nach R. Kohlrausch aus Regnault's Beobachtungen).

t	*b*=720mm	730mm	740mm	750mm	760mm	770mm	Prop.-Theile	
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		
0°	1225	1242	1259	1276	1293	1310	17	
1	1220	1237	1254	1271	1288	1305	1mm	2
2	1216	1233	1249	1267	1283	1300	2	3
3	1212	1228	1245	1262	1279	1296	3	5
4	1207	1224	1241	1257	1274	1290	4	7
5	1203	1219	1236	1253	1270	1286	5	8
6	1198	1215	1232	1248	1265	1282	6	10
7	1194	1211	1227	1244	1260	1277	7	12
8	1190	1206	1223	1239	1256	1272	8	14
9	1186	1202	1219	1235	1251	1268	9	15
10	1181	1198	1214	1231	1247	1263	16	
11	1177	1194	1210	1226	1243	1259	1mm	2
12	1173	1189	1206	1222	1238	1255	2	3
13	1169	1185	1202	1218	1234	1250	3	5
14	1165	1181	1197	1214	1230	1246	4	6
15	1161	1177	1193	1209	1225	1242	5	8
16	1157	1173	1189	1205	1221	1237	6	10
17	1153	1169	1185	1201	1217	1233	7	11
18	1149	1165	1181	1197	1213	1229	8	13
19	1145	1161	1177	1193	1209	1224	9	14
20	1141	1157	1173	1189	1204	1220	15	
21	1137	1153	1169	1185	1200	1216	1mm	1
22	1133	1149	1165	1181	1196	1212	2	3
23	1130	1145	1161	1177	1192	1208	3	4
24	1126	1141	1157	1173	1188	1204	4	6
25	1122	1138	1153	1169	1184	1200	5	7
26	1118	1134	1149	1165	1180	1196	6	9
27	1114	1130	1145	1161	1176	1192	7	10
28	1110	1126	1142	1157	1172	1188	8	12
29	1107	1122	1138	1153	1169	1184	9	13
30°	1103	1119	1134	1149	1165	1180		

7. Tab. **Reduction eines Gasvolumens auf 0° und 760^{mm}.**

Reduction auf 0°. $\alpha=0{,}003665$.

t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$
0°	1,0000	40°	1,1466	80°	1,2932
1	1,0037	41	1,1503	81	1,2969
2	1,0073	42	1,1539	82	1,3005
3	1,0110	43	1,1576	83	1,3042
4	1,0147	44	1,1613	84	1,3079
5	1,0183	45	1,1649	85	1,3115
6	1,0220	46	1,1686	86	1,3152
7	1,0257	47	1,1723	87	1,3189
8	1,0293	48	1,1759	88	1,3225
9	1,0330	49	1,1796	89	1,3262
10°	1,0366	50°	1,1832	90°	1,3298
11	1,0403	51	1,1869	91	1,3335
12	1,0440	52	1,1906	92	1,3372
13	1,0476	53	1,1942	93	1,3408
14	1,0513	54	1,1979	94	1,3445
15	1,0550	55	1,2016	95	1,3482
16	1,0586	56	1,2052	96	1,3518
17	1,0623	57	1,2089	97	1,3555
18	1,0660	58	1,2126	98	1,3592
19	1,0696	59	1,2162	99	1,3628
20°	1,0733	60°	1,2199	100°	1,3665
21	1,0770	61	1,2236		
22	1,0806	62	1,2272		
23	1,0843	63	1,2309		
24	1,0880	64	1,2346		
25	1,0916	65	1,2382		
26	1,0953	66	1,2419		
27	1,0990	67	1,2456		
28	1,1026	68	1,2492		
29	1,1063	69	1,2529		
30°	1,1099	70°	1,2565		
31	1,1136	71	1,2602		
32	1,1173	72	1,2639		
33	1,1209	73	1,2675		
34	1,1246	74	1,2712		
35	1,1283	75	1,2749		
36	1,1319	76	1,2785		
37	1,1356	77	1,2822		
38	1,1393	78	1,2859		
39	1,1429	79	1,2895		
40°	1,1466	80°	1,2932		

Reduction auf 760^{mm} Druck.

b	$\frac{b}{760}$	b	$\frac{b}{760}$
mm		mm	
700	0,9211	740	0,9737
701	0,9224	741	0,9750
702	0,9237	742	0,9763
703	0,9250	743	0,9776
704	0,9263	744	0,9789
705	0,9276	745	0,9803
706	0,9289	746	0,9816
707	0,9303	747	0,9829
708	0,9316	748	0,9842
709	0,9329	749	0,9855
710	0,9342	750	0,9868
711	0,9355	751	0,9882
712	0,9368	752	0,9895
713	0,9382	753	0,9908
714	0,9395	754	0,9921
715	0,9408	755	0,9934
716	0,9421	756	0,9947
717	0,9434	757	0,9961
718	0,9447	758	0,9974
719	0,9461	759	0,9987
720	0,9474	760	1,0000
721	0,9487	761	1,0013
722	0,9500	762	1,0026
723	0,9513	763	1,0039
724	0,9526	764	1,0053
725	0,9539	765	1,0066
726	0,9553	766	1,0079
727	0,9566	767	1,0092
728	0,9579	768	1,0105
729	0,9592	769	1,0118
730	0,9605	770	1,0132
731	0,9618	771	1,0145
732	0,9632	772	1,0158
733	0,9645	773	1,0171
734	0,9658	774	1,0184
735	0,9671	775	1,0197
736	0,9684	776	1,0211
737	0,9697	777	1,0224
738	0,9710	778	1,0237
739	0,9724	779	1,0250
740	0,9737	780	1,0263

8. Tab. **Reduction einer mit Messinggewichten ausgeführten Wägung auf den leeren Raum.**

Δ	k	Δ	k
0,7	+ 1,57	2,0	+ 0,46
0,8	1,36	3,0	0,26
0,9	1,19	4,0	0,16
1,0	1,06	5,0	0,10
1,1	0,95	6,0	0,06
1,2	0,86	7,0	0,03
1,3	0,78	8,0	+ 0,01
1,4	0,71	9,0	— 0,01
1,5	0,66	10,0	— 0,02
1,6	0,61	12,0	— 0,04
1,7	0,56	14,0	— 0,06
1,8	0,52	16,0	— 0,07
1,9	0,49	18,0	— 0,08
2,0	+ 0,46	20,0	— 0,08

Es ist $\frac{k}{1000} = 0,0012\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{8,4}\right)$. Vgl. S. 34.

Hat der gewogene Körper die Dichtigkeit Δ, ist sein Gewicht in der Luft gleich m Gramm gefunden, so sind mk Milligramm hinzuzufügen, um die Wägung auf den leeren Raum zu reduciren.

9. Tab. **Ausdehnungscoefficienten für 1° C.**

Die Länge L eines Körpers vergrössert sich für 1 Grad um βL, das Volumen V um $3\beta V$.

	β		β
Blei	0,0000285	Messing.	0,000019
Eisen	0,000012	Platin.	0,000009
Glas.	0,0000085	Silber	0,000019
Gold.	0,000015	Zink.	0,000029
Kupfer	0,0000175	Zinn.	0,000022

Das Quecksilber vergrössert sein Volumen V für 1° um 0,0001815 V.

10. Tab. **Siedetemperatur des Wassers** *t*

bei dem Barometerstand *b*. (Nach Regnault's Beobachtungen.)

b	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*
mm		mm		mm		mm		mm	
680	96°,92	700	97°,72	720	98°,49	740	99°,26	760	100°,00
681	96 ,96	01	,75	21	,53	41	,29	61	,04
682	97 ,00	02	,79	22	,57	42	,33	62	,07
683	,04	03	,83	23	,61	43	,37	63	,11
684	,08	04	,87	24	,65	44	,41	64	,15
685	,12	05	,91	25	,69	45	,44	65	,18
686	,16	06	,95	26	,72	46	,48	66	,22
687	,20	07	97,99	27	,76	47	,52	67	,26
688	,24	08	98,03	28	,80	48	,56	68	,29
689	,28	09	,07	29	,84	49	,59	69	,33
690	,32	710	,11	730	,88	750	,63	770	,36
691	,36	11	,15	31	,92	51	,67	71	,40
692	,40	12	,19	32	,95	52	,70	72	,44
693	,44	13	,22	33	98,99	53	,74	73	,47
694	,48	14	,26	34	99,03	54	,78	74	,51
695	,52	15	,30	35	,07	55	,82	75	,55
696	,56	16	,34	36	,11	56	,85	76	,58
697	,60	17	,38	37	,14	57	,89	77	,62
698	,64	18	,42	38	,18	58	,93	78	,65
699	,68	19	,46	39	,22	59	99,96	79	,69
700	97,72	720	98,49	740	99,26	760	100,00	780	100,72

11. Tab. **Spannkraft des Wasserdampfes**

in Mm. Quecksilber zwischen 90° und 101° Temperatur (Regnault).

	90°	91°	92°	93°	94°	95°	96°	97°	98°	99°	100°
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
,0	525,4	545,8	566,8	588,4	610,7	633,8	657,5	682,0	707,3	733,2	760,0
,1	527,4	547,8	568,9	590,6	613,0	636,1	659,9	684,5	709,8	735,8	762,7
,2	529,5	549,9	571,0	592,8	615,3	638,5	662,4	687,0	712,4	738,5	765,5
,3	531,5	552,0	573,2	595,0	617,6	640,8	664,8	689,5	715,0	741,2	768,2
,4	533,5	554,1	575,3	597,3	619,9	643,2	667,2	692,0	717,6	743,8	771,9
,5	535,5	556,2	577,5	599,5	622,2	645,6	669,7	694,6	720,1	746,5	773,7
,6	537,6	558,3	579,7	601,7	624,5	647,9	672,1	697,1	722,7	749,2	776,5
,7	539,6	560,4	581,8	604,0	626,8	650,3	674,6	699,6	725,4	751,9	779,3
,8	541,7	562,5	584,0	606,2	629,1	652,7	677,1	702,1	728,0	754,6	782,0
,9	543,7	564,6	586,2	608,5	631,4	655,1	679,5	704,7	730,6	757,3	784,8

12. Tab.

Mittlerer Barometerstand b in der Höhe H über dem Meeresspiegel.

(Unter Annahme der Lufttemperatur 10°.)

H		b
Meter.	Par. Fuss.	Mm.
0	0	760
100	308	751
200	616	742
300	924	733
400	1231	724
500	1539	716
600	1847	707
700	2155	699
800	2463	690
900	2771	682
1000	3078	674
1100	3386	666
1200	3694	658
1300	4002	650
1400	4310	642
1500	4618	635
1600	4926	627
1700	5233	620
1800	5541	612
1900	5849	605
2000	6157	598

13. Tab.

Zur Hygrometrie.

Spannkraft e des Wasserdampfes in Mm. Quecksilber, und Wassergehalt von 1 Cub. Mtr. in Grammen, wenn der Dampf bei der Temperatur t gesättigt ist.

(Nach den Beobachtungen von Magnus und von Regnault.)

t	e	f	t	e	f
	mm	gr		mm	gr
—10°	2,0	2,1	10°	9,1	9,4
— 9	2,2	2,4	11	9,8	10,0
— 8	2,4	2,7	12	10,4	10,6
— 7	2,6	3,0	13	11,1	11,3
— 6	2,8	3,2	14	11,9	12,0
— 5	3,1	3,5	15	12,7	12,8
— 4	3,3	3,8	16	13,5	13,6
— 3	3,6	4,1	17	14,4	14,5
— 2	3,9	4,4	18	15,4	15,1
— 1	4,2	4,6	19	16,3	16,2
0°	4,6	4,9	20°	17,4	17,2
1	4,9	5,2	21	18,5	18,2
2	5,3	5,6	22	19,7	19,3
3	5,7	6,0	23	20,9	20,4
4	6,1	6,4	24	22,2	21,5
5	6,5	6,8	25	23,6	22,9
6	7,0	7,3	26	25,0	24,2
7	7,5	7,7	27	26,5	25,6
8	8,0	8,1	28	28,1	27,0
9	8,5	8,8	29	29,8	28,6
10°	9,1	9,4	30°	31,6	30,1

14. Tab. **Specifische Wärme einiger Substanzen.**

Im Mittel von 0 bis 100°		Quecksilber	0,0333
Blei.	0,0314	Aether bei 17°	0,516
Eisen.	0,114	Alcohol bei 17°.	0,615
Glas	0,19	Terpentinöl bei 17° . . .	0,426
Gold	0,0324	Glycerin.	0,555
Kupfer.	0,0951	Wasser bei 0°	1,0000
Messing	0,094	„ „ 10°	1,0005
Platin	0,0324	„ „ 20°	1,0012
Silber	0,0570	„ „ 30°	1,0020
Zink	0,0955	„ im Mittel von 0° bis 100°. .	1,0050
Zinn	0,0562		

15. Tab.

Spannkraft des Quecksilberdampfes

in Mm. Quecksilber (Regnault).

Temp.	Spannkraft.
	mm
0°	0,02
20	0,04
40	0,08
60	0,16
80	0,35
100	0,75
120	1,5
140	3,1
160	5,9
180	11,0
200	19,9
220	34,7
240	58,8
260	96,7
280	155,2
300	242,2

16. Tab.

Capillardepression des Quecksilbers in einer Glasröhre

(nach Danger).

Halbmesser.	Depression der Kuppe.	Höhe des Meniscus.
mm	mm	
1	5,03	0,57
2	2,18	0,95
3	1,20	1,22
4	0,70	1,41
5	0,42	1,54
6	0,25	1,62
7	0,15	1,67
8	0,10	1,68
9	0,06	1,69
10	0,04	1,69

17. Tab. Elasticitätsmodul E und Tragfähigkeit p einiger Metalle im ausgezogenen Zustande bei 17° C.

(Nach Wertheim.)

Die Zahlen bedeuten $\frac{\text{Kgr.}}{\square^{\text{mm}}}$; d. h. wenn ein Draht von $1\square^{\text{mm}}$ Querschnitt gegeben ist, so bedeutet E das Gewicht in Kgr., welches angehängt werden müsste, um seine Länge zu verdoppeln, und p das Gewicht in Kgr., bei welchem Zerreissung eintritt. Allgemein, die Verlängerung l eines Drahtes von der Länge L und dem Querschnitt $p\square^{\text{mm}}$ durch ein Gewicht gleich P Kgr. beträgt $l = \frac{L.\,P}{q.\,E}$; und ein Draht vom Querschnitt $q\square^{\text{mm}}$ zerreisst bei der Belastung $q.p$ Kgr.

Z. B. ein Eisendraht habe die Länge 1000^{mm} und den Durchmesser $0{,}8^{\text{mm}}$, also den Querschnitt $0{,}4^2.3{,}14 = 0{,}50\square^{\text{mm}}$. Derselbe wird durch eine Belastung von 5 Kgr. verlängert um $\frac{1000.5}{0{,}5.19000} = 0{,}53^{\text{mm}}$. Er zerreisst bei $0{,}5.61 = 30{,}5$ Kgr. Belastung.

	E	p
Blei	1800	2,1
Eisen	19000	61
Stahl	21000	70
Gold	8100	27
Kupfer	12400	40
Messing	9000	60
Platin	17000	34
Silber	7400	29
Zink	8700	13
Zinn	4000	2,4

18. Tab. Tonhöhe und Schwingungszahl in 1 Sec.

	C_{-2}	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
C	16,35	32,70	65,41	130,8	261,7	523,3	1047	2093
Cis	17,32	34,65	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2218
D	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	587,4	1175	2350
Dis	19,44	38,89	77,79	155,6	311,2	622,3	1245	2489
E	20,60	41,20	82,41	164,8	329,7	659,3	1319	2637
F	21,82	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fis	23,12	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
G	24,50	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Gis	25,95	51,91	103,8	207,6	415,3	830,6	1661	3322
A	27,50	55,00	110,0	220,0	**440,0**	880,0	1760	3520
Ais	29,13	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
H	30,86	61,73	123,5	246,9	493,9	987,7	1975	3951

19. Tab. **Spectrallinien der wichtigsten leichten Metalle,**

bezogen auf die Scale von Bunsen und Kirchhoff, wenn die Natronlinie auf den Theilstrich 50 eingestellt ist; gesehen bei einer Spaltbreite = 1 Scalentheil.

Die erste Zahl bedeutet die Lage der Mitte der Linie auf der Scale; die römische Ziffer bezeichnet die Helligkeit, die zweite deutsche Zahl die ungefähre Breite des Streifens. Wo letztere nicht angegeben, beträgt die Breite etwa 1 Scalentheil.

S bedeutet ganz scharf begrenzt, *s* mässig scharf. Die übrigen Linien sind verwaschen.

Die für jeden Körper zur Erkennung wichtigsten Linien sind fett gedruckt.

Die Helligkeit der Linien für Ca, Sr, Ba bezieht sich auf ein andauerndes Spectrum. Werden diese Körper als Chlorverbindungen angewandt, so ist die Helligkeit Anfangs viel grösser.

Die Farbe des Spectrums ist (ungefähr): Roth bis 48, Gelb bis 52, Grün bis 80, Blau bis 120, Violett von 120 an.

Ka	Na	Li	Ca	Sr	Ba
17,5 II *s*					
				29,8 III	
		32,0 I *S*		**32,1** II	
			33,1 IV 2	**33,8** II	
			36,7 III	36,3 II	35,2 IV 2
				38,6 III	
			41,7 I 1,5	41,5 III	41,5 III 3
Mattes		45,2 IV *s*	46,8 III 2	**45,8** I	45,6 III*s* 1,5
zusammen-	**50,0** I *S*		49,0 III		
			52,8 IV		52,1 IV
hängendes			54,9 IV		56,0 III 2
			60,8 I 1,5		**60,8** II *s*
Spectrum			68,0 IV 2		66,5 III 3
von					**71,4** III 3
					76,8 III 2
55					82,7 IV 4
bis					**89,3** III 2
				105,0 III *s*	
120					
			135,0 IV *s*		
153,0 IV					

20. Tab. **Mittleres Licht-Brechungsverhältniss und Dispersionsvermögen einiger Körper.**

	Brechungs-verhältniss.	Dispersions-vermögen.
Crownglas (Mittel)	1,53	0,022
Flintglas „	1,60	0,042
Wasser	1,336	0,0132
Alcohol	1,372	0,0133
Schwefelkohlenstoff	1,68	0,0837
Canadabalsam	1,54	
Luft	1,000294	

12. Tab. **Zur Reduction einer Schwingungsdauer auf unendlich kleine Schwingungen.**

$$k = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4} + \frac{5}{64}\sin^4\frac{\alpha}{4}.$$

Wenn die Schwingungsdauer eines Magnetes oder eines Pendels $= t$ beobachtet ist bei einem ganzen Schwingungsbogen von α Graden, so ist, um die Schwingungsdauer auf unendlich kleine Schwingungen zu reduciren, von dem beobachteten Werthe abzuziehen $k.t$.

α	k		α	k		α	k		α	k	
0°	0,00000	0	10°	0,00048	10	20°	0,00190	20	30°	0,00428	29
1	000	2	11	058	11	21	210	20	31	457	30
2	002	2	12	069	11	22	230	21	32	487	31
3	004	4	13	080	13	23	251	23	33	518	32
4	008	4	14	093	14	24	274	23	34	550	33
5	012	5	15	107	15	25	297	25	35	583	33
6	017	6	16	122	16	26	322	25	36	616	35
7	023	7	17	138	16	27	347	26	37	651	35
8	030	9	18	154	18	28	373	27	38	686	37
9	039	9	19	172	18	29	400	28	39	723	38
10°	0,00048		20°	0,00190		30°	0,00428		40°	0,00761	

22. Tab. **Horizontale Intensität des Erdmagnetismus**

für das mittlere Europa zu Anfang des Jahres 1870.

(Nach Lamont's Karten aus neuen Göttinger Beobachtungen.)

Die Horizontalintensität wächst in einem Jahre um 0,004.

Nördl. Breite.	Oestliche Länge von Ferro.				
	20°	25°	30°	35°	40°
45°	2,06	2,09	2,14	2,18	2,22
46°	2,02	2,05	2,10	2,14	2,18
47°	1,98	2,01	2,06	2,09	2,14
48°	1,94	1,97	2,01	2,05	2,10
49°	1,90	1,93	1,97	2,01	2,05
50°	1,85	1,89	1,93	1,97	2,01
51°	1,82	1,85	1,89	1,93	1,97
52°	1,78	1,81	1,85	1,89	1,92
53°	1,74	1,78	1,82	1,85	1,88
54°	1,71	1,74	1,79	1,81	1,84
55°	1,66	1,72	1,75	1,78	1,80

23. Tab. **Westliche Declination der Magnetnadel**

für das mittlere Europa, zu Anfang des Jahres 1870.

Die Declination nimmt jährlich um 0°,16 ab.

Nördl. Breite.	Oestliche Länge von Ferro.										
	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°
45°	16°,9	16,5	16,1	15,6	15,2	14,7	14,2	13,8	13,3	12,9	12,4
50°	18,4	17,9	17,4	16,8	16,3	15,7	15,1	14,5	14,1	13,7	13,1
55°	20,0	19,2	18,5	17,8	17,2	16,6	15,9	15,3	14,8	14,3	13,7
	30°	31°	32°	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°
45°	12,4	11,9	11,4	10,9	10,4	10,0	9,7	9,2	8,8	8,4	7,8
50°	13,1	12,6	12,0	11,5	11,0	10,5	9,9	9,4	8,9	8,4	7,8
55°	13,7	13,1	12,6	12,1	11,5	11,0	10,4	9,8	9,3	8,7	8,0

24. Tab. Galvanischer Leitungswiderstand s einiger Substanzen bezogen auf den des Quecksilbers bei 0° gleich Eins.

Der Widerstand wächst in mittlerer Temperatur auf 1° Zunahme
bei den reinen, festen Metallen um 0,4%,
bei dem Neusilber um 0,04%,
bei dem Quecksilber um 0,08%;
er nimmt ab bei der Schwefelsäure im Mittel um 1%.

Aus dem Werthe s für eine Substanz berechnet sich der Widerstand w einer Säule von l Meter Länge und q □mm Querschnitt $w = \frac{l.s}{q}$ Siemens'schen Quecksilbereinheiten. Z. B. ist der Widerstand eines 10 Meter langen Kupferdrahtes von 0,5 □mm Querschnitt bei 0° gleich $\frac{10.0,0162}{0,5} = 0,324$ Siem., also bei 20° gleich $0,324 + 0,324.0,004.20 = 0,350$ Siem. Die Zahlen gelten (nach Matthiessen) für die reinen Metalle, sind daher für die käuflichen nur als Annäherungen zu betrachten. Insbesondere ist der Widerstand des käuflichen Kupfers oft viel grösser.

Antimon gepresst bei 0° . . . s =	0,360
Blei " "	0,199
Eisen weich "	0,0986
Gold " "	0,0209
Kupfer " "	0,0162
Kupfer hart "	0,0166
Messing " "	0,051
Neusilber " "	0,212
Platin weich "	0,0918
Quecksilber "	1,0000
Silber weich "	0,0153
Silber hart "	0,0166
Wismuth gepresst "	1,33
Zink " "	0,0571
Zinn " "	0,134
Schwefelsäure bei 20°	
spec. Gew. = 1,01	131600
1,02	76800
1,03	54300
1,04	42000
1,05	34300
1,06	29000
1,07	25100
1,08	22300
1,09	20100
1,10	18400
1,15	14300
1,23 (Min.)	12600
1,30	13400
Salpetersäure, käufliche	16000
Kupfervitriol, bei 20°	
2 Th. Salz in 10 Th. Wasser	170000
Zinkvitriol, bei 20°	
3 Th. Salz in 10 Th. Wasser (Min.)	216000

25. Tab. **Reduction der verschiedenen Maafse galvanischer Ströme auf einander.**

Eine Stromstärke, welche gemessen wurde in	ist mit folgenden Zahlen zu multipliciren, um ausgedrückt zu werden in				
	Cb. Cm. Knallgas in 1min	Mgr. Wasser in 1min	Mgr. Kupfer in 1min	Mgr. Silber in 1min	magnetischem Maafse.
Cub. Cm. Knallgas in 1min		0,5363	1,889	6,432	0,9579
Mgr. Wasser in 1min	1,865		3,522	11,99	1,786
Mgr. Kupfer in 1min	0,5294	0,2839		3,405	0,5071
Mgr. Silber in 1min	0,1555	0,0834	0,2937		0,1489
nach magnetisch. Maafse	1,044	0,5599	1,972	6,714	

26. Tab. **Chemische Aequivalentgewichte einiger Substanzen.**

Die mit einem Stern versehenen Zeichen bedeuten in der neueren Chemie als „Atomgewichte“ meistens das Doppelte des in dieser Tabelle beigesetzten Aequivalentgewichtes.

Aluminium	*Al	=	13,7	Natrium	Na	=	23
Barium	*Ba	=	68,5	Nickel	*Ni	=	29
Blei	*Pb	=	103,5	Phosphor	P	=	31
Calcium	*Ca	=	20,0	Platin	*Pt	=	98,7
Chrom	*Cr	=	26,1	Quecksilber	*Hg	=	100
Chlor	Cl	=	35,5	Sauerstoff	*O	=	8
Eisen	*Fe	=	28	Schwefel	*S	=	16
Gold	Au	=	197	Silber	Ag	=	107,9
Kalium	K	=	39,1	Silicium	*Si	=	14
Kobalt	*Co	=	30	Stickstoff	N	=	14
Kohle	*C	=	6	Strontium	*Sr	=	43,8
Kupfer	*Cu	=	31,7	Wasserstoff	H	=	1
Magnesium	*Mg	=	12	Zink	*Zn	=	32,6
Mangan	*Mn	=	27,5	Zinn	*Sn	=	59

27. Tab. **Verschiedene Zahlen.**

(Die eingeklammerten Brüche bedeuten Näherungswerthe.)

Die Zahl $\pi = 3{,}1416$ ($\frac{22}{7}$); $\pi^2 = 9{,}870$; $\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$.

Der Modul der natürlichen Logarithmen = 2,3026.

Der Winkel, für welchen der Bogen dem Halbmesser gleich ist, $= 57^0{,}2958 = 3437'{,}75 = 206265''$.

Verhältniss des wahrscheinlichen zum mittleren Fehler = 0,67449 ($\frac{2}{3}$).

1 Par. Fuss = 0,32484 Mtr. ($\frac{13}{40}$); 1 Mtr. = 3,0784 Par. Fuss.
1 Par. Linie = 2,2558 Mm. ($\frac{9}{4}$); 1 Mm. = 0,44330 Par. Lin.
1 Rhein. Fuss = 0,31385 Mtr. ($\frac{10}{32}$); 1 Mtr. = 3,1862 Rhein. Fuss.
1 Engl. Fuss (Dez.) = 0,30479 Mtr. ($\frac{7}{23}$); 1 Mtr. = 3,2809 Engl. Fuss.
1 Geogr. Meile = 7,4204 Kilom. ($\frac{30}{4}$); 1 Kil. = 0,13476 Geogr. Meil.

Die halbe grosse Axe der Erde = 6377400 Mtr.
Die halbe kleine Axe der Erde = 6356100 Mtr.
Der mittlere Halbmesser der Erde = 6366800 Mtr.

	Beschleunigung der Schwere	Länge des Sec.-Pendels
unter 45° Breite	9806 Mm.	993,5 Mm.
am Aequator	9780 Mm	990,9 Mm.
am Pole	9832 Mm.	996,2 Mm.

Mittlere Länge des bürgerlichen Jahres = $365^t\ 5^h\ 48^m{,}8$.

Schallgeschwindigkeit bei 0° in trockner Luft = 330 $\frac{\text{Met.}}{\text{Sec.}}$.

Der Ausdehnungscoefficient der Gase = 0,003665 ($\frac{1}{273}$).

Latente Wärme der Wassers = 79,4.

Latente Wärme des Wasserdampfs = 540.

Specifische Wärme der Luft bei constantem Druck = 0,237.

Die Zahl, welche in das Atomgewicht dividirt die Dampfdichte gibt, = 28,88.

Elektromotorische Kraft { Grove oder Bunsen = 20,0 Siem. Weber.
Daniell = 11,7 Siem. Weber. }

Der galvanische Strom 1 nach Weber'schem magnetischem Maafse zersetzt in 1 Min. die Wassermenge 0,560 Mgr.

Die Siemens'sche Widerstandseinheit ist nach absolutem Maafse $= 0{,}9705\ \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$.

Wellenlänge des Natronlichtes (*D* Fraunhofer) = 0,0005895 Mm.

Eine Quarzplatte von 1 Mm. Dicke dreht das Natronlicht um $21^0{,}67$.

28. Tab. **Quadrate, Quadratwurzeln und Reciproke.**

n	n^2	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1,000	1,0000
2	4	1,414	0,5000
3	9	1,732	0,3333
4	16	2,000	0,2500
5	25	2,236	0,2000
6	36	2,449	0,1667
7	49	2,646	0,1429
8	64	2,828	0,1250
9	81	3,000	0,1111
10	100	3,162	0,1000
11	121	3,317	0,0909
12	144	3,464	0,0833
13	169	3,606	0,0769
14	196	3,742	0,0714
15	225	3,873	0,0667
16	256	4,000	0,0625
17	289	4,123	0,0588
18	324	4,243	0,0556
19	361	4,359	0,0526
20	400	4,472	0,0500
21	441	4,583	0,0476
22	484	4,690	0,0455
23	529	4,796	0,0435
24	576	4,899	0,0417
25	625	5,000	0,0400
26	676	5,099	0,0385
27	729	5,196	0,0370
28	784	5,292	0,0357
29	841	5,385	0,0345
30	900	5,477	0,0333
31	961	5,568	0,0323
32	1024	5,657	0,0313
33	1089	5,745	0,0303
34	1156	5,831	0,0294
35	1225	5,916	0,0286
36	1296	6,000	0,0278
37	1369	6,083	0,0270
38	1444	6,164	0,0263
39	1521	6,245	0,0256
40	1600	6,325	0,0250
41	1681	6,403	0,0244
42	1764	6,481	0,0238
43	1849	6,557	0,0233
44	1936	6,633	0,0227
45	2025	6,708	0,0222
46	2116	6,782	0,0217
47	2209	6,856	0,0213
48	2304	6,928	0,0208
49	2401	7,000	0,0204
50	2500	7,071	0,0200
50	2500	7,071	0,0200
51	2601	7,141	0,0196
52	2704	7,211	0,0192
53	2809	7,280	0,0189
54	2916	7,348	0,0185
55	3025	7,416	0,0182
56	3136	7,483	0,0179
57	3249	7,550	0,0175
58	3364	7,616	0,0172
59	3481	7,681	0,0169
60	3600	7,746	0,0167
61	3721	7,810	0,0164
62	3844	7,874	0,0161
63	3969	7,937	0,0159
64	4096	8,000	0,0156
65	4225	8,062	0,0154
66	4356	8,124	0,0152
67	4489	8,185	0,0149
68	4624	8,246	0,0147
69	4761	8,307	0,0145
70	4900	8,367	0,0143
71	5041	8,426	0,0141
72	5184	8,485	0,0139
73	5329	8,544	0,0137
74	5476	8,602	0,0135
75	5625	8,660	0,0133
76	5776	8,718	0,0132
77	5929	8,775	0,0130
78	6084	8,832	0,0128
79	6241	8,888	0,0127
80	6400	8,944	0,0125
81	6561	9,000	0,0123
82	6724	9,055	0,0122
83	6889	9,110	0,0120
84	7056	9,165	0,0119
85	7225	9,220	0,0118
86	7396	9,274	0,0116
87	7569	9,327	0,0115
88	7744	9,381	0,0114
89	7921	9,434	0,9112
90	8100	9,487	0,0111
91	8281	9,539	0,0110
92	8464	9,592	0,0109
93	8649	9,644	0,0108
94	8836	9,695	0,0106
95	9025	9,747	0,0105
96	9216	9,798	0,0104
97	9409	9,849	0,0103
98	9604	9,899	0,0102
99	9801	9,950	0,0101
100	10000	10,000	0,0100

29. Tab. **Trigonometrische Zahlen.**

Winkel.	Sinus.		Tangens.		Cotangens.		Cosinus.		
0°	0,000		0,000		∞		1,000		90°
		17		17				0	
1	0,017		0,017		57,29		1,000		89
		18		18				1	
2	0,035		0,035		28,64		0,999		88
		17		17				0	
3	0,052		0,052		19,08		0,999		87
		18		18				1	
4	0,070		0,070		14,30		0,998		86
		17		17				2	
5	0,087		0,087		11,43		0,996		85
		18		18				1	
6	0,105		0,105		9,514		0,995		84
		17		18				2	
7	0,122		0,123		8,144		0,993		83
		17		18				3	
8	0,139		0,141		7,115		0,990		82
		17		17		811		2	
9	0,156		0,158		6,314		0,988		81
		18		18		643		3	
10°	0,174		0,176		5,671		0,985		80°
		17		18		526		3	
11	0,191		0,194		5,145		0,982		79
		17		19		440		4	
12	0,208		0,213		4,705		0,978		78
		17		18		374		4	
13	0,225		0,231		4,331		0,974		77
		17		18		320		4	
14	0,242		0,249		4,011		0,970		76
		17		19		279		4	
15	0,259		0,268		3,732		0,966		75
		17		19		245		5	
16	0,276		0,287		3,487		0,961		74
		16		19		216		5	
17	0,292		0,306		3,271		0,956		73
		17		19		193		5	
18	0,309		0,325		3,078		0,951		72
		17		19		174		5	
19	0,326		0,344		2,904		0,946		71
		16		20		157		6	
20°	0,342		0,364		2,747		0,940		70°
		16		20		142		6	
21	0,358		0,384		2,605		0,934		69
		17		20		130		7	
22	0,375		0,404		2,475		0,927		68
		16		20		119		6	
23	0,391		0,424		2,356		0,921		67
		16		21		110		7	
24	0,407		0,445		2,246		0,914		66
		16		21		101		8	
25	0,423		0,466		2,145		0,906		65
		15		22		95		7	
26	0,438		0,488		2,050		0,899		64
		16		22		87		8	
27	0,454		0,510		1,963		0,891		63
		15		22		82		8	
28	0,469		0,532		1,881		0,883		62
		16		22		77		8	
29	0,485		0,554		1,804		0,875		61
		15		23		73		9	
30°	0,500		0,577		1,732		0,866		60°
		15		24		67		9	
31	0,515		0,601		1,664		0,857		59
		15		24		64		9	
32	0,530		0,625		1,600		0,848		58
		15		24		60		9	
33	0,545		0,649		1,540		0,839		57
		14		26		57		10	
34	0,559		0,675		1,483		0,829		56
		15		25		55		10	
35	0,574		0,700		1,428		0,819		55
		14		27		52		10	
36	0,588		0,727		1,376		0,809		54
		14		27		49		10	
37	0,602		0,754		1,327		0,799		53
		14		27		47		11	
38	0,616		0,781		1,280		0,788		52
		13		29		45		11	
39	0,629		0,810		1,235		0,777		51
		14		29		43		11	
40°	0,643		0,839		1,192		0,766		50°
		13		30		42		11	
41	0,656		0,869		1,150		0,755		49
		13		31		39		12	
42	0,669		0,900		1,111		0,743		48
		13		33		39		12	
43	0,682		0,933		1,072		0,731		47
		13		32		36		12	
44	0,695		0,966		1,036		0,719		46
		12		35		36		12	
45°	0,707		1,000		1,000		0,707		45°
	Cosinus.		Cotangens.		Tangens.		Sinus.		Winkel.

30. Tab. **Vierstellige Logarithmen.**

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	42
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	38
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	35
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	32
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	30
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	28
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	26
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	25
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	23
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	22
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	18
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	18
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	15
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	14
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	11
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

Vierstellige Logarithmen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	8
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	7
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	9785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	5
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	5
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	6675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	5
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	5
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.



